Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 28. Juni 2018

1. [6+2 = 8 P]

(a) Finden Sie ein nicht-degeneriertes kompaktes Dreieck $\triangle \subset \mathbb{C}$, dass

$$\int_{\partial\triangle} \overline{z}\, \mathrm{d}z \neq 0,$$

wobei $\partial\triangle$ für einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg entlang des positiv orientierten Randes des Dreiecks $\triangle \subset \mathbb{C}$ steht.

(b) Was erhalten wir, wenn wir $\overline{z}$ durch eine auf der Umgebung des Abschlusses von Δ holomorphe Funktion (z.B. $f(z) = z$) ersetzen?

2. [3+2+3+2+2 = 12 P] Es sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ die geschlitzte komplexe Ebene und Log der Hauptzweig des komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C}_-$ (vgl. auch Blatt 8, Aufgabe 4).

(a) Gilt $\mathrm{Log}(z \cdot w) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$ für $z, w, z \cdot w \in \mathbb{C}_-$?

(b) Zeigen Sie, dass eine Logarithmusfunktion L (d.h. $\exp(L(z)) = z$) in 0 nicht komplex differenzierbar sein kann.

(c) Zeigen Sie, dass durch $g_n(z) := \exp\left(\frac{1}{n}\mathrm{Log}(z)\right), n \in \mathbb{N}$, auf $\mathbb{C}_-$ eine Funktion mit der Eigenschaft $(g_n(z))^n = z$ definiert wird und geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils n verschiedene holomorphe Funktionen mit dieser Eigenschaft von g_n an.

(d) Gilt $g_2(z \cdot w) = g_2(z) \cdot g_2(w)$ für $z, w, z \cdot w \in \mathbb{C}_-$?

(e) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, keine holomorphe Funktion $\widetilde{g}_n$ mit der Eigenschaft $(\widetilde{g}_n(z))^n = z$ existiert.

3. 8+2+2 = 12 P] Seien G_1, G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f\colon G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Weg γ in G_1 bzw. G_2 gelte zudem für dieses f, dass $\int_\gamma f\, \mathrm{d}z = 0$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist, so gilt $\int_\gamma f\, \mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg in $G_1 \cup G_2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel von G_1, G_2 mit nicht zusammenhängendem $G_1 \cap G_2$ an.

(c) Geben Sie ein Beispiel von G_1, G_2 und f mit nicht zusammenhängendem $G_1 \cap G_2$ und einem geschlossenen Weg γ in $G_1 \cup G_2$ derart, dass $\int_\gamma f\, \mathrm{d}z \neq 0$.

4. [8 P] Wie wollen Funktionen auf holomorphe Fortsetzbarkeit untersuchen. Sei dazu $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine reelle Gerade. Zeigen Sie: Wenn $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig und auf $D \setminus L$ holomorph ist, dann ist f auf D holomorph.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13