Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 21. Juni 2018

1. [2+2 = 4 P] Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $L\colon U \to \mathbb{C}$ heißt Logarithmusfunktion, falls für alle $z \in U$ gilt, dass $\exp(L(z)) = z$.

(a) Zeigen Sie, dass auf jedem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ die Logarithmusfunktion bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, falls eine existiert.

(b) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Logarithmusfunktion existiert.

2. [8 P] Sei $\rho > 0$. Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{it}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$

(b) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{nit}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-1}$

(c) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \alpha\cos(t) + i\beta\sin(t)$, $\alpha, \beta > 0$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

(d) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{it}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := g'(z) \cdot g(z)$ für $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph

3. [4+2+2+4+6 = 18 P] Im folgenden erarbeiten wir erste Ansätze, wie Kurvenintegrale $\int_\gamma \frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z$ von komplexen gebrochen-rationalen Funktionen p/q berechnet werden können, wobei p und q komplexe Polynome sind. Sei hierzu $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Kurve gegeben durch $t \mapsto e^{it}$.

(a) Berechnen Sie $\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wie erklären Sie sich das Resultat für $n = -1$?

(b) Sei $f(z) := \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 1$. Was ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$?

(c) Zeigen Sie nun, dass $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0$ für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > 1$.

(d) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Entwickeln Sie $\frac{1}{(z-a)^n}, n \in \mathbb{N}$, um 0 in eine Potenzreihe in a. Wie groß ist der Konvergenzradius? Berechnen Sie damit $\int_\gamma \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$.

(e) Bestimmen Sie damit und mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die folgenden Integrale:

(i) $\int_\gamma \frac{1}{z^2-4i}\,\mathrm{d}z$ (ii) $\int_\gamma \frac{3+2\cdot z}{z\cdot(z+3)}\,\mathrm{d}z$

4. [2+3+2+3 = 10 P] Für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $W(v_1, v_2) := \dfrac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$. Seien ferner U, V offene Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Eine (reell) differenzierbare Abbildung $f\colon U \to V$ mit in jedem Punkt von U invertierbarem Differential heißt *winkeltreu*, falls für je zwei beliebige, reguläre differenzierbare Kurven $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 1] \to U$ mit Schnittpunkt $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ gilt:

$$W\big((f \circ \gamma_1)'(t_1), (f \circ \gamma_2)'(t_2)\big) = W(\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2))$$

(a) Was bedeuten W und die obige Formel anschaulich?

(b) Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f\colon U \to V$ mit auf U nullstellenfreiem f' zwischen zwei Bereichen U und V in $\mathbb{C}$ eine winkeltreue Abbildung bzgl. des reellen Skalarproduktes $\langle z, w\rangle = \frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w)$ ist.

(c) Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to X$ differenzierbare, winkeltreue Abbildungen zwischen Bereichen U, V, X in $\mathbb{C}$. Ist die Verkettung $g \circ f$ ebenfalls winkeltreu?

(d) Zeigen Sie, dass $z \mapsto \overline{z}$ eine winkeltreue Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist, und beschreiben Sie mit Hilfe dieser Abbildung möglichst viele nicht-holomorphe, winkeltreue Abbildungen.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13