Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 14. Juni 2018

1. [4+6 = 10 P]

(a) Zeigen Sie für die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe der Potenzreihendarstellung, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$

(ii) f ist in 0 komplex differenzierbar

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und bestimmen Sie alle solche Funktionen f.

2. [2 + 8 = 10 P]

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion jeden Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich oft annimmt.

(b) Zeigen Sie, dass $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv sind.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jede der beiden Gleichungen $a = \frac{1}{2}(w \pm 1/w)$ jeweils für jedes $a \in \mathbb{C}$ (mind.) eine Lösung $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat.

3. [10 P] Skizzieren Sie die Bilder der folgenden Punktmengen unter der Exponentialfunktion:

- $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \pi/2\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$
- $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \log 2\}$
- $E = \{z \in \mathbb{C} : -\log 2 < \operatorname{Re} z < \log 2, -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$

4. [2+4+2+2 = 10 P] Mit $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ bezeichnen wir die *geschlitzte komplexe Ebene*. Wir definieren den *Hauptzweig der Argumentfunktion* $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C}_- \to (-\pi, \pi)$ dadurch, dass $\operatorname{Arg}(z)$ den Winkel zwischen der reellen Achse $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ und dem Vektor $z \in \mathbb{C}_-$ angibt.

(a) Stellen Sie $\operatorname{Arg}(z)$ mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen explizit dar. Beachten Sie dabei die Fälle $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ und $\operatorname{Re} z > 0$

(b) Zeigen Sie, dass Arg reell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

(c) Wir nennen $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}_- \to \mathbb{C},\ z \mapsto \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$, den *Hauptzweig des Logarithmus*. Zeigen Sie, dass er holomorph ist.

(d) Was hat er mit der komplexen Exponentialfunktion zu tun?

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13