Funktionentheorie Übungsblatt 7

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 7. Juni 2018

---

1. [5+3+3 = 11 P] Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $f_n(z) := \dfrac{1}{1+z^n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \equiv 1$ auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ der punktweise Grenzwert der Folge $(f_n)_n$ ist, also $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ für festes $z \in \mathbb{D}$. Wieso ist $a_n := \sup_{r\mathbb{D}} |f_n(z) - f(z)| \leq \max_{\overline{r\mathbb{D}}} |f_n(z) - f(z)|$ für $0 < r < 1$? Bestimmen Sie $(a_n)_n$. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge? Falls ja, wie folgert man daraus, dass $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f auf $\mathbb{D}$ konvergiert?

(b) Wie sieht es mit der lokal glm. Konvergenz von f auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ aus?

(c) Zeigen Sie erneut, dieses Mal mit Hilfe von Potenzreihen, dass $(f_n)_n$ auf $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

2. [2+2+6 = 10 P]

(a) Bestimmen Sie die größte offene Kreisscheibe, in welcher die jeweilige Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig konvergiert.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ik}(z+1-2i)^{2k}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2+k+2i}{2ik^2+3}\right)^k (z-5i)^{3k}$

(b) Entwickeln Sie mit Hilfe einer geometrischen Reihe die Funktion $z \mapsto 1/z^n, n \in \mathbb{N}$, in eine Potenzreihe um einen Punkt $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

3. [5 P] Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe, die auf ganz $\mathbb{C}$ **lokal gleichmäßig** konvergiert. Entwickeln Sie die Abbildung $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ in eine Potenzreihe um 0 und untersuchen Sie sie auf Konvergenz und Holomorphie. Vergleichen Sie das Resultat mit Blatt 5, Aufgabe 2.

4. [2+4 = 6 P] Vergleichen Sie die beiden Begriffe *lokal gleichmäßige Konvergenz* und *gleichmäßige Konvergenz* anhand komplexer Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

(a) Gegen Sie ein Beispiel für eine auf $\mathbb{C}$ **lokal gleichmäßig** konvergente komplexen Potenzreihe an, die kein Polynom ist.

(b) Angenommen, f sei auf $\mathbb{C}$ **gleichmäßig** konvergent. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

5. [2+2+4 = 8 P]

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ mit $a_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut, aber auf $\mathbb{R}$ nicht normal konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ mit $b_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig, aber auf $\mathbb{R}$ nicht normal konvergiert.

(c) Gibt es eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ mit $c_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ absolut und gleichmäßig, aber auf $\mathbb{R}$ nicht normal konvergiert?

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13