# Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 31. Mai 2018

---

**1.** [3 P] Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche im Punkt 0 partiell differenzierbar ist, dort die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, aber nicht komplex differenzierbar ist. Was schließen Sie daraus für den Zusammenhang zwischen den Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen, der komplexen Differenzierbarkeit und den Voraussetzungen an $f$?

**2.** [8 P] Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ daraufhin, ob sie Realteil einer auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sein können und geben Sie diese ggf. an. Notation: $z = x + yi \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $a(z) = x^2 - y^2$

(ii) $b(z) = x^2 + y^2$

(iii) $c(z) = x^3$

(iv) $d(z) = \cos(x)\sinh(y)$

**3.** [2+4+3+4+6+2 = 21 P] Wir untersuchen die Eigenschaften der Wirtinger-Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z} z$ und $\frac{\partial}{\partial z}\overline{z}$.

(b) Welche Eigenschaften lassen sich von den reellen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ auf die Wirtinger-Ableitungen übertragen? Denken Sie dabei an die Linearität, Produktregel und die Quotientenregel und geben Sie einen Beweis an.

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Zeigen Sie: $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$.
Wie sieht die analoge Formel für $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ aus?

(d) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und seien $f\colon U \to V$ bzw. $g\colon V \to \mathbb{C}$ in $z_0$ bzw. $f(z_0)$ reell differenzierbar. Zeigen Sie: $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial g}{\partial w}(f(z_0)) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z_0)) \cdot \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)$

(e) Berechnen Sie beide Wirtinger-Ableitungen der Funktionen von Aufgabe 1a–c, Blatt 5.

(f) Drücken Sie den Laplace-Operator $\Delta$ mit Hilfe der Wirtinger-Ableitungen aus.

**4.** [3+3+2=8 P] Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Sei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$.

(a) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen folgenden $\mathbb{C}$-Vektorräumen her:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \{L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ : \ L \text{ ist } \mathbb{C}\text{−linear}\}, \quad V_3 = \mathbb{C}$$

(b) Sei $f$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Vergleichen Sie das obige Resultat mit der reellen Jacobi-Matrix von $f$ in $z_0$. Was fällt auf? Beweisen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$ ist, wobei hier die Wirtinger-Ableitung gemeint ist.

(c) Finden Sie ein Kriterium an $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, das die komplexe Differenzierbarkeit von $f$ in $z_0$ charakterisiert.

*Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13*