Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 17. Mai 2018

1. [2+2+2+2 = 8 P] Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen von $z = x+yi \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$, den größtmöglichen Definitionsbereich und in welchen Punkten ihres Definitionsbereichs sie komplex differenzierbar sind. Entscheiden Sie je nach Aufgabentyp, ob Sie dies direkt mit der Definition oder mit Hilfe der Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen zeigen.

(a) $\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

(b) $3z^2\overline{z} + \overline{z}^3$

(c) $\dfrac{\overline{z} - i}{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1}$

(d) $\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

2. [2+2+4 = 8 P] Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(a) Für welche f ist auch $z \mapsto f(\overline{z})$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

(b) Für welche f ist auch $z \mapsto \overline{f(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung g'.

3. [2+2+4+4 = 12 P]

(a) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau auf den Punkten der reellen Achse komplex differenzierbar ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau auf der Vereinigung der reellen Achse mit der imaginären Achse komplex differenzierbar ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau im Innern des Einheitskreises komplex differenzierbar ist.

(d) Gibt es eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$, die genau in den Punkten $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist?

4. [2+4+6 = 12 P] Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ bzw. *subharmonisch* falls $\Delta f \geq 0$

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann harmonisch ist, wenn f und $-f$ subharmonisch sind.

(b) Sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ in jedem Punkt komplex differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\log|g|$ harmonisch ist.

(c) Für welche $c > 0$ ist $h(z) := |z|^8 + c \cdot |z|^2 \operatorname{Re}(z^6)$ subharmonisch?

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13