Funktionentheorie Übungsblatt 4

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 10. Mai 2018

1. [8 P] Zeigen Sie für eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{Z}$ ist konstant.

2. [2+4+2+4 = 10 P] Wir definieren die *Abstandsfunktion* zu einer Menge $M \subseteq \mathbb{C}, M \neq \emptyset$, wie folgt:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto d_M(z) := \inf\{|z-p| \ : \ p \in M\}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $0 \leq d_M(z) < \infty$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $d_M(z) = 0$?

(b) Zeigen Sie, dass $z \mapsto d_M(z)$ Lipschitz-stetig ist und bestimmen Sie die Lipschitz-Konstante.

(c) Seien $I = [a,b],\ J = [c,d] \subset \mathbb{R}$ zwei disjunkte, kompakte Intervalle. Geben Sie eine stetige, stückweise lineare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften an:

- $f(z) = 0 \iff z \in I$
- $f(z) = 1 \iff z \in J$

(d) Seien $K, L \subset \mathbb{C}$ zwei disjunkte, kompakte Mengen. Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to [0,1]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften an:

- $f(z) = 0 \iff z \in K$
- $f(z) = 1 \iff z \in L$

3. [2 + 2 + 4 + 3 = 11 P] Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung.

(a) Ist $M := \gamma([0,1])$ zusammenhängend?

(b) Ist $\mathbb{C} \setminus M$ zusammenhängend?

(c) Zu $\varepsilon > 0$ sei $M_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \ : \ d_M(z) < \varepsilon\}$, wobei d_M die Abstandsfunktion aus der vorangehenden Aufgabe bezeichnet. Ist M_ε zusammenhängend?

(d) Seien M und $\mathbb{C} \setminus M$ zusammenhängend. Ist auch $\mathbb{C} \setminus M_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ zusammenhängend?

4. (a) [2+3+6=11 P] Zeigen Sie, dass sich jedes komplexwertige Polynom $\sum_{k,\ell=0}^{N} a_{k\ell} \cdot x^k y^\ell$ auch als komplexwertiges Polynom der Form $\sum_{k,\ell=0}^{N} b_{k\ell} \cdot z^k \overline{z}^\ell$ schreiben lässt, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $b_{k\ell}$ in Abhängigkeit von $a_{k\ell}$.

(b) Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eigentlich*, falls das Urbild jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ unter f wieder eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Geben Sie ein Beispiel eines nicht-konstanten Polynoms, das nicht eigentlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Polynom in z, d.h. ohne Terme mit $\overline{z}$, eigentlich ist.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13