Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 3. Mai 2018

1. [2+4+(3+3)=12 P]

(a) Geben Sie eine Ungleichung bzw. Gleichung in z und $\overline{z}$ an, welche die offene Kreisscheibe bzw. den Rand des Kreises mit Radius $\rho > 0$ um den Punkt $m \in \mathbb{C}$ beschreibt.

(b) Welche Bedingungen müssen $a, b, c \in \mathbb{C}$ erfüllen, damit

$$z\overline{z} + az + b\overline{z} + c = 0$$

eine Kreislinie beschreibt? Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius.

(c) Beschreiben Sie folgende Mengen geometrisch und skizzieren Sie sie.

(i) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z\overline{z} + i\overline{z} + \overline{z} - iz + z \geq 0\}$

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 2iz\overline{z} - (8i+4)\overline{z} + (4-8i)z + 34i = 0\}$

2. [2+2+3+3=10 P] Bestimmen Sie die Werte $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgenden Reihen **absolut** konvergieren. Geben Sie stets an, welche Methode oder welchen Satz Sie anwenden.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3+i)^n}{n2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(in)^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\log(n) + i\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log|z| + 2i + 1)^n}{5^n}$

3. [(3+3)+2=8 P]

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$ und $g(z) = \dfrac{\operatorname{Im}^3(z) \cdot \operatorname{Re}^2(z)}{|z|^2}$. Lassen sich f bzw. g stetig auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen?

(b) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass f in 0 nicht stetig ist, aber $|f|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f|(z) := |f(z)|$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist.

4. [4+6=10 P]

(a) Sei $a \in \mathbb{C}$. Geben Sie für die folgenden Polynome eine möglichst kleine obere Schranke für die Nullstellen an, d.h. ein $M > 0$ s.d. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$ gilt: $|z| \leq M$.

(i) 1 (ii) $z - a$ (iii) $z^n + a$ (iv) $z^5 + az + 1$

(b) Sei $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jede Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ von f gilt:

$$|z_0| \leq 2 \cdot \max\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \,:\, k = 1, \ldots, n \right\}$$

Hinweis: Sei $\rho := \max\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \,:\, k = 1, \ldots, n \right\}$. *Betrachten Sie* $f/\rho^n = 0$.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13