

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 26. April 2018

1. [2+2+2+(3+3)=12 P]

- (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z - \bar{z} = 0$ die reelle Achse in \mathbb{C} beschreibt.
- (b) Geben Sie eine Gleichung in z und \bar{z} an, welche die Gerade durch die Punkte 1 und $3 - 2i$ in \mathbb{C} beschreibt.
- (c) Geben Sie die allgemeine Form einer Geradengleichung in \mathbb{C} mittels z und \bar{z} an.
- (d) Beschreiben Sie die folgenden Mengen geometrisch und skizzieren Sie sie.

$$(i) \quad \{z \in \mathbb{C} : (1 - i) \cdot z - (1 + i) \cdot \bar{z} = 5\}$$

$$(ii) \quad \{z \in \mathbb{C} : iz + i\bar{z} \leq 3\}$$

2. [2+3+3+4=12 P] Skizzieren Sie die untenstehenden Folgen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte.

$$(a) \quad z_n = \frac{|(1+i)^n| \cdot |2-2i|^n}{8^n}$$

$$(b) \quad z_n = \frac{(i+n)^5 - (-i+n)^5}{n^4}$$

$$(c) \quad z_n = n^2(i^n - 1)$$

$$(d) \quad z_n = \lambda^n(2+2i)^n \text{ für jedes } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. [4+6+2+4=16 P]

- (a) Seien $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und die beiden \mathbb{R} -linearen Abbildungen

$$A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad A(z) := 2x - y + i(x + 2y)$$

$$B: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad B(z) := 2x + y + i(x + 2y),$$

gegeben. Schreiben Sie A in der Form λz mit einem geeignetem $\lambda \in \mathbb{C}$. Gilt das auch für B ? Wie lässt sich B auf ähnliche Weise mit z und \bar{z} darstellen? Wo ist der Unterschied? Vergleichen Sie dazu die darstellenden Matrizen von A und B bzgl. der Basis $\{1, i\}$.

- (b) Zeigen Sie, dass sich jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben lässt als

$$f(z) = a \cdot z + b \cdot \bar{z}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

- (c) Was lässt sich über dieses f sagen, wenn f zudem \mathbb{C} -linear ist?
- (d) Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit f ein \mathbb{R} -Vektorraum-Automorphismus auf \mathbb{C} wird? Formulieren Sie einen Satz und beweisen Sie ihn.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13