Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 23. April 2018

1. [5+5 P] Seien $z = 4 + 7i$ und $w = 2 + 3i$.

(a) Wie kann man den komplexen Bruch w/z in der Form $\alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ darstellen? Leiten Sie eine allgemeine Methode her, indem Sie für die obigen Beispielzahlen folgende Rechnungen ausführen:

(i) $z \cdot \overline{z}$ (ii) $|z|$ (iii) $\overline{z}/|z|^2$ (iv) $1/z$ (v) w/z

(b) Wie kann man folgende Beträge auf möglichst einfache Art berechnen? Begründen Sie ggf. Ihre Vereinfachungen durch Verweis auf die Vorlesung oder einen Beweis.

(vi) $|zw|$ (vii) $|z^2|$ (viii) $|z/w|$ (ix) $|z/\overline{z}|$ (x) $|z + w|$

2. [2+3+5 P] Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und zeichnen Sie sie in der komplexen Zahlenebene ein.

(a) $(i + 1)^n$ für $n = 1, 2, 4, 8$.

(b) $\dfrac{(i + 1)^4}{(i - 1)^4}$

(c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^k$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ und $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^k$

3. [2+4+4 P]

(a) Beschreiben Sie die komplexe Konjugation $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ geometrisch.

(b) Beschreiben Sie die Abbildung $f_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \lambda \cdot z$ für $\lambda > 0$, $\lambda = i$ und allgemein für $\lambda = \cos(t) + i \sin(t),\ t \in (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ geometrisch.

(c) Wie lautet die Gleichung für eine Spiegelung $s\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an der Geraden durch 0 und $1 + i$? Drücken Sie s nur mit Hilfe von z und $\overline{z}$ aus.

4. [5+5 P] Sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus (Begriff ggf. selbständig recherchieren!).

(a) Bestimmen Sie $\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ induktiv. Was ist $\varphi(1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$? Was ist $\varphi(-1)$? Welche Werte kann $\varphi(i)$ annehmen?

(b) Sei G die Menge der stetigen Körperautomorphismen von $\mathbb{C}$. Zeigen oder widerlegen Sie anhand der Resultate in (a) folgende Behauptung: Die Menge G besteht nur aus der Identitätsabbildung und der komplexen Konjugation, d.h.

$$G = \{z \mapsto z,\ z \mapsto \overline{z}\}.$$

Abgabe: zu Beginn der Übungsstunde