BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

21.07.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Probeklausur zur Analysis 2, SoSe 2017

Hinweis Die Lösungen werden im Tutorium am 26.07. besprochen.

Aufgabe 1 (12 P)

(a) (2 P) Sei A eine Menge. Wie lautet die Definition einer Metrik $d : A \times A \to \mathbb{R}$ auf A ?

(b) (6 P) Sei d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass durch

$$\delta((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) := \max\{d(X_j, Y_j) : j = 1, 2\}$$

auf dem Raum $(\mathbb{R}^n)^2 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Metrik definiert wird.

(c) (4 P) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y^2\}$ offen ist (bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$).

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Eine Abbildung $d\colon A \times A \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, wenn folgende Axiome gelten:

(i) Für alle $x, y \in A$ gilt $d(x, y) \geq 0$. Es gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in A$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in A$.

(b) Es müssen die Axiome aus (a) überprüft werden.

zu (i) Seien $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt $d(X_j, Y_j) \geq 0$ für $j = 1, 2$ und damit folgt $\delta((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) \geq 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\delta((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = 0 &\Leftrightarrow d(X_j, Y_j) = 0 \ \forall j = 1, 2 \\ &\Leftrightarrow X_j = Y_j \ \forall j = 1, 2 \\ &\Leftrightarrow (X_1, X_2) = (Y_1, Y_2).\end{aligned}$$

zu (ii) Wegen der Symmetrie von d folgt

$$\begin{aligned}\delta((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \max\{d(X_j, Y_j) : j = 1, 2\} \\ &= \max\{d(Y_j, X_j) : j = 1, 2\} \\ &= \delta((Y_1, Y_2), (X_1, X_2))\end{aligned}$$

für alle $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Für alle $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\delta((X_1, X_2), (Z_1, Z_2)) &= \max\{d(X_j, Z_j) \mid j = 1, 2\} \\ &\leq \max\{d(X_j, Y_j) + d(Y_j, Z_j) \mid j = 1, 2\} \\ &\leq \max\{d(X_j, Y_j) \mid j = 1, 2\} + \max\{d(Y_j, Z_j) \mid j = 1, 2\} \\ &= \delta((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) + \delta((Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2))\end{aligned}$$

nach der Dreieckungleichung von d.

(c) Sei $A := \mathbb{R}^2 \setminus U$, d.h. das Komplement von U in $\mathbb{R}^2$. Damit ist U genau dann offen, wenn A abgeschlossen ist. Wir wollen nun die Abgeschlossenheit von A zeigen. Sei dazu eine Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit Grenzwert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_n := |x_n| - y_n^2$. Damit folgen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_0 := \lim_{n\to\infty} a_n = |\lim_{n\to\infty} x_n| - \lim_{n\to\infty} y_n^2 = |x_0| - y_0^2.$$

aufgrund der Stetigkeit von $|\cdot|$ und Polynomen. Somit gilt auch $a_0 \geq 0$, weshalb schließlich $(x_0, y_0) \in A$ resultiert. Demnach ist A abgeschlossen, also U offen.

Alternative: Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := |x| - y^2$. Sei zudem ein beliebiger Punkt $(x_0, y_0) \in U$ gegeben. Demnach gilt $f(x_0, y_0) < 0$, also

$$\varepsilon := -\frac{1}{2} f(x_0, y_0) > 0.$$

Weil f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Punkte $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ die Ungleichung

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

gilt. Für alle $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ gilt demnach

$$f(x, y) < \varepsilon + f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} f(x_0, y_0) < 0,$$

weshalb $B((x_0, y_0), \delta) \subset U$ folgt. Also ist U offen.

Aufgabe 2 (14 P)

(a) (2 P) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar im Punkt x_0. Wie kann man die Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ bestimmen?

(b) (4 P) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ist f im Ursprung total differenzierbar? Für welche $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, existiert $D_v f(0, 0)$?

(c) (8 P) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 12x - y^2$$

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Die Richtungsableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Weil f sogar total differenzierbar ist, können wir alternativ auch $D_v f(x_0) = \langle Df(x_0), v\rangle$ berechnen.

(b) Wenn f in $(0,0)$ total differenzierbar wäre, müssten die partiellen Ableitungen in x- und y-Richtung existieren. Es gilt zwar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{|t|t} = \lim_{t\to 0} t\frac{t}{|t|} = 0,$$

weil $\frac{t}{|t|}$ für $t \neq 0$ beschränkt ist, aber für $t \neq 0$ gilt

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2}{|t|t} = \frac{t}{|t|}.$$

Nun folgt zum Beispiel mit den Nullfolgen $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass die partielle Ableitung in Richtung y nicht existiert. Also ist f im Ursprung nicht total differenzierbar.

Sei nun ein $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq (0,0)$ gegeben. In Anlehnung an die Definition aus Teil (a) berechnen wir zunächst für $t \neq 0$

$$\frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3v_1^3 + t^2v_2^2}{\sqrt{t^2v_1^2 + t^2v_2^2}\ t} = \frac{t^2v_1^3 + tv_2^2}{|t||v|} = \frac{t}{|t|}\frac{tv_1^3 + v_2^2}{|v|}.$$

Für $v_2 = 0$ folgt also

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} t\frac{t}{|t|}\frac{v_1^3}{|v|} = 0,$$

also existiert $D_v f(0,0)$. Für $v_2 \neq 0$ gilt dagegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{|\frac{1}{n}|}\frac{\frac{1}{n}v_1^3 + v_2^2}{|v|} = \frac{v_2^2}{|v|} \neq -\frac{v_2^2}{|v|} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{|-\frac{1}{n}|}\frac{-\frac{1}{n}v_1^3 + v_2^2}{|v|},$$

weshalb $D_v f(0,0)$ in diesem Fall nicht existiert.

(c) Die Funktion ist als Polynom unendlich oft differenzierbar auf ihrem offenen Definitionsbereich. An der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ berechnen wir zunächst den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2 - 12, 2xy - 2y)$$

und die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir mittels $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2 - 12, 2y(x-1)) = (0,0)$ die kritischen Punkte. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass $x = 1$ oder $y = 0$ gilt. Im Fall $x = 1$ wird die erste Gleichung zu $y^2 = 9$, weshalb $(x,y) = (1,3)$ und $(x,y) = (1,-3)$ kritische Punkte sind. Im Fall $y = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $x^2 = 4$, weshalb $(x,y) = (2,0)$ und $(x,y) = (-2,0)$ ebenfalls kritische Punkte sind. Als nächstes setzen wir die kritischen Punkte in die Hesse-Matrix ein. Es gilt

$$H_f(1,3) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},$$

Der linke obere Eintrag ist echt positiv, und $\det H_f(1,3) = -36$ echt negativ. Somit ist $H_f(1,3)$ indefinit und f hat in $(1,3)$ kein lokales Extremum.
Alternativ berechnen wir

$$\langle (x_1, x_2), H_f(1,3)(x_1, x_2)^t \rangle = 6x_1(x_1 + 2x_2)$$

Setzen wir $(x_1, x_2) = (1, -1)$, ist dies gleich $-6 < 0$. Daher kann $H_f(1,3)$ nicht positiv definit sein. Setzen wir $(x_1, x_2) = (1, 0)$, ist dies gleich $6 > 0$. Daher kann $H_f(1,3)$ nicht negativ definit sein. Somit ist $H_f(1,3)$ indefinit und f hat in $(1,3)$ kein lokales Extremum.
Analog folgt die Indefinitheit von

$$H_f(1,-3) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

mittels der Vektoren $(1,0)$ und $(1,1)$, weshalb f in $(1,-3)$ ebenfalls kein lokales Extremum besitzt.
Des Weiteren hat

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $12 > 0$ und $2 > 0$. Alternativ können auch die führenden Hauptminoren betrachtet werden, d.h. hier der obere linke Eintrag $12 > 0$ und $\det H_f(2,0) = 24 > 0$. Demnach ist $H_f(2,0)$ positiv definit, also nimmt f ein lokales Minimum in $(2,0)$ an.
Oder wir berechnen

$$\langle (x_1, x_2), H_f(2,0)(x_1, x_2)^t \rangle = 12x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

für alle $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Daher ist $H_f(2,0)$ positiv definit.

Zuletzt hat

$$H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $-12 < 0$ und $-6 < 0$. Alternativ kann ebenfalls über die führenden Hauptminoren argumentiert werden, d.h. hier über den oberen linken Eintrag $-12 < 0$ und $\det H_f(-2,0) = 72 > 0$. Damit ist $H_f(-2,0)$ negativ definit und f nimmt in $(-2,0)$ ein lokales Maximum an.
Oder wir berechnen

$$\langle (x_1, x_2), H_f(-2,0)(x_1, x_2)^t \rangle = -12x_1^2 - 2x_2^2 < 0$$

für alle $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Daher ist $H_f(-2,0)$ negativ definit.

Aufgabe 3 (14 P)

(a) (2 P) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Welche Bedingungen an die Funktion f garantieren, dass ihre Hesse-Matrix exisitiert und symmetrisch ist?

(b) (6 P) Sei $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy - z = 0\} \cap \{x^2 + y^2 = 2\}$. Was ist der Abstand von C zum Ursprung?

(c) (6 P) Zeigen Sie, dass man das folgende System von Gleichungen nahe dem Punkt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,1,1,0)$ nach $(u,v) = g(x,y)$ auflösen kann.

$$\begin{aligned} -x + y^2 + 2uv &= 0 \\ x^2 - xy + y^2 - u^2 + v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Wie lautet das Differential von g in $(1,1)$?

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Wenn eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, existiert die Hesse-Matrix von f nicht nur, der Satz von Schwarz sagt zudem noch aus, dass diese Matrix symmetrisch ist.

(b) Der Abstand von C zum Ursprung ist gegeben durch

$$d(0, C) = \inf\{|(x, y, z)| \mid (x, y, z) \in C\}.$$

Wir müssen also die Euklidische Norm $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ unter den Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xy - z \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu minimieren. Es reicht zur leichteren Berechnung auch die stetig differenzierbare Funktion

$$f(x, y, z) := |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

zu minimieren. Für diese gilt

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nun ist $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $C = \{g = 0\}$. Für Punkte $(x, y, z) \in C$ gilt zudem $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, weshalb der Rang von

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

2 beträgt und somit voll ist.
Für Punkte $(x, y, z) \in C$ folgt aus $g_2(x, y, z) = 0$ bereits $|x| \leq \sqrt{2}$ und $|y| \leq \sqrt{2}$. Zusammen mit $g_1(x, y, z)$ folgt demnach $|z| = |xy| \leq 2$, weshalb C beschränkt ist. Da g stetig ist, ist $C = g^{-1}(\{0\})$ zudem abgeschlossen, also nach dem Satz von Heine-Borel sogar kompakt. Daher nimmt die stetige Funktion $f|_C$ ein Minimum in einem Punkt $(x, y, z) \in C$ an. Nach dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(y, x, -1) + \mu(2x, 2y, 0).$$

Aus der letzten Komponente folgt $\lambda = -2z$ und zusammen mit $xy = z$ werden die übrigen zwei Gleichungen zu

$$x = -xy^2 + \mu x, \qquad\qquad y = -x^2 y + \mu y.$$

Damit gilt einerseits $x = 0$ oder $1 + y^2 - \mu = 0$ und andererseits $y = 0$ oder $1 + x^2 - \mu = 0$. Im Fall $x = 0$ folgt aus $x^2 + y^2 = 2$ bereits $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$. Des Weiteren gilt $z = xy = 0$. Damit sind

$$v_1 := (0, \sqrt{2}, 0)$$
$$v_2 := (0, -\sqrt{2}, 0)$$

mögliche Punkte.
Sei nun $x \neq 0$. Falls zudem $y = 0$ gilt, folgen analog zum vorherigen Fall

$$v_3 := (\sqrt{2}, 0, 0)$$
$$v_4 := (-\sqrt{2}, 0, 0)$$

als mögliche lokale Extrema.
Falls ebenfalls $y \neq 0$ gilt, folgt

$$1 + y^2 = \mu = 1 + x^2,$$

also $x^2 = y^2$. Daher resultiert aus $x^2 + y^2 = 2$

$$x = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = -1.$$

Dies führt mittels $x^2 = y^2$ und $xy = z$ zu den möglichen Punkten

$$\begin{aligned} v_5 &:= (1, 1, 1) \\ v_6 &:= (1, -1, -1) \\ v_7 &:= (-1, 1, -1) \\ v_8 &:= (-1, -1, 1) \end{aligned}$$

Nun gelten

$$f(v_1) = \ldots = f(v_4) = 2 < 3 = f(v_5) = \ldots = f(v_8)$$

und weil $f|_C$ in einem der Punkte $v_1, \ldots, v_8$ ein Minimum annehmen muss, geschieht dies in den Punkten $v_1, \ldots, v_4$. Damit ist der Abstand zwischen C und dem Ursprung $d(0, C) = \sqrt{2}$.

Alternative: Für Punkte $(x, y, z) \in C$ gilt

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = 2 + z^2 \geq 2,$$

weshalb 2 eine untere Schranke der Menge $\{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in C\}$ ist. Nun ist beispielsweise $(\sqrt{2}, 0, 0) \in C$ und es gilt $f(\sqrt{2}, 0, 0)$. Somit gilt

$$\inf\{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in C\} = 2$$

und es folgt $d(0, C) = \sqrt{2}$.

(c) Definiere $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y, u, v) := \begin{pmatrix} -x + y^2 + 2uv \\ x^2 - xy + y^2 - u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

Damit ist F stetig differenzierbar und es gilt

$$DF(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 2y & 2v & 2u \\ 2x - y & 2y - x & -2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, kann der Satz über implizite Funktion angewendet werden. Es existieren somit offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1, 1)$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(1, 0)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ mit

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y, u, v) = 0\} \cap (U \times V) = \{(x, y, u, v) \in U \times V \mid (u, v) = g(x, y)\}$$

Um schließlich das Differential von g zu bestimmen, benötigen wir

$$\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,0)\right)^{-1} = \frac{1}{\det \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,0)} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt nach dem Satz über implizite Funktionen

$$Dg(1,1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 P)

(a) (6 P) Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2)^2 \leq z\}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$(x,y,z) = \Psi(r,\vartheta) = \big(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi),\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi),\ r\cos(\vartheta)\big).$$

Hinweis: Sie müssen mit Hilfe der Ungleichung, die K definiert, das Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^3$ finden, auf dem Ψ definiert ist. Alternativ können Sie auch Zylinderkoordinaten nehmen oder K als Normalbereich schreiben und das Integral direkt lösen.

(b) (4 P) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1+y^2}{y(1+x^2)} = 0, \quad y(1) = 1$$

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung in die Form $g(y)y' = f(x)$ und integrieren Sie links nach y und rechts nach x.

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) **Variante:** Normalbereich
Für einen beliebigen Punkt $(x,y,z) \in K$ folgt aus der definierenden Ungleichung bereits $z \in [0,1]$. Somit kann auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel gezogen werden, weshalb $x^2+y^2+z^2 \leq \sqrt{z}$ folgt. Dies führt zu

$$|x| \leq \sqrt{\sqrt{z} - y^2 - z^2} \leq \sqrt{\sqrt{z} - z^2},$$

wobei die letzte Abschätzung nötig ist, um den maximalen Bereich für x nur in Abhängigkeit von z auszudrücken. Analog folgt schließlich $|y| \leq \sqrt{\sqrt{z} - x^2 - z^2}$, also insgesamt

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, |x| \leq \sqrt{\sqrt{z}-z^2}, |y| \leq \sqrt{\sqrt{z}-x^2-z^2}\right\}.$$

Damit gilt für das Volumen von K

$$|K| = \int_K 1\ d(x,y,z) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{\sqrt{z}-z^2}}^{\sqrt{\sqrt{z}-z^2}} \int_{-\sqrt{\sqrt{z}-x^2-z^2}}^{\sqrt{\sqrt{z}-x^2-z^2}} 1\ dy\ dx\ dz$$

Die Berechnung der Integrale ist wegen der verschachtelten Wurzeln allerdings nicht leicht.
Variante: Zylinderkoordinaten
Wir wählen die Transformation $\Psi\colon (0,+\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ mittels

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(r,\varphi,h) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten wird die K definierende Ungleichung zu

$$(r^2+h^2)^2 \le h$$

und analog zu Variante 1 folgt zunächst $0\le h\le 1$ und anschließend $|r|\le\sqrt{\sqrt{h}-h^2}$. Dies liefert den Normalbereich

$$P := \left\{(r,\varphi,h)\in(0,+\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \mid 0\le h\le 1, 0\le r\le\sqrt{\sqrt{h}-h^2}, \varphi\in(-\pi,\pi]\right\}$$

mit $\Psi(P)=K$. Mit der Transformationsformel folgt schließlich

$$\begin{aligned} |K| &= \int_K 1\ d(x,y,z) \\ &= \int_P \left|\det\Psi'(r,\varphi,h)\right| d(r,\varphi,h) \\ &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{\sqrt{h}-h^2}}\int_{-\pi}^{\pi} r\ d\varphi\ dr\ dh \\ &= \int_0^1\int_0^{\sqrt{\sqrt{h}-h^2}} 2\pi r\ dr\ dh \\ &= \pi\int_0^1 [r^2]_{r=0}^{\sqrt{\sqrt{h}-h^2}}\ dh \\ &= \pi\int_0^1 \sqrt{h}-h^2\ dh \\ &= \pi\left[\frac{2}{3}h^{3/2}-\frac{1}{3}h^3\right]_{h=0}^1 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Variante: Polarkoordinaten
Sei $\Psi\colon (0,\infty)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(r,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten ist die K definierende Ungleichung durch $r^4\le r\cos(\vartheta)$ gegeben. Hieraus folgt zunächst $\vartheta\in[0,\pi/2]$, da $\cos(\vartheta)\ge 0$ gelten muss und anschließend

$$0\le r\le\sqrt[3]{\cos(\vartheta)}.$$

Mit dem Normalbereich

$$P := \left\{(r,\vartheta,\varphi)\in(0,\infty)\times[0,\pi)\times[0,2\pi) \mid 0\le\vartheta\le\pi/2, 0\le r\le\sqrt[3]{\cos(\vartheta)}\right\}$$

gilt dann $\Psi(P) = K$. Nach der Transformationsformel gilt somit

$$\begin{aligned}
\int_K 1 \; d(x,y,z) &= \int_P \left| r^2 \sin(\vartheta) \right| d(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt[3]{\cos(\vartheta)}} r^2 \sin(\vartheta) \; dr \; d\varphi \; d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^{\sqrt[3]{\cos(\vartheta)}} d\varphi \; d\vartheta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} \cos(\vartheta) \; d\varphi \; d\vartheta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \; d\vartheta \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \; d\vartheta \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Wegen der Bedingung $y(1) = 1$ ist die Differentialgleichung wohldefiniert

$$y' = -\frac{1+y^2}{y} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-\frac{y}{1+y^2}}_{=:g(y)} y' = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{=:f(x)}$$

wohldefiniert. Die Differentialgleichung kann nun mittels getrennter Variablen als $g(y)y' = f(x)$ geschrieben werden. Damit sind die Stammfunktionen von g bzw. f gegeben durch

$$\begin{aligned}
&G(y) := -\frac{1}{2} \ln(1+y^2) \text{ und} \\
&F(x) := \arctan(x) + C_1.
\end{aligned}$$

Ziel ist es nun $y(x)$ so zu bestimmen, dass $G(y(x)) = F(x) + C_1$ gilt, wobei $C_1 \in \mathbb{R}$ konstant ist. Einsetzen von G und F führt zu der Bedingung

$$-\frac{1}{2} \ln(1 + y(x)^2) = \arctan(y(x)) + C_1,$$

welche nach Anwendung der Exponentialfunktion gleichbedeutend mit

$$y(x)^2 = C_2 e^{-2\arctan(x)} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y(x)| = \sqrt{C_2 e^{-2\arctan(x)} - 1}$$

ist, wobei $C_2 = e^{-2C_1}$ ist. Wegen der Forderung $y(1) = 1$ kommt nur die positive Lösung in Frage, d.h.

$$y(x) = \sqrt{C_2 e^{-2\arctan(x)} - 1}.$$

Weil $\varphi(1) = 1$ gelten soll, folgt $C_2 = 2e^{2\arctan(1)} = 2e^{\frac{\pi}{2}}$ und damit

$$y(x) = \sqrt{2e^{-2\arctan(x) + \frac{\pi}{2}} - 1}$$

als Lösung der Differentialgleichung.