BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

18.09.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Nachklausur zur Analysis 2, SoSe 2017

Aufgabe 1 (22 P)

(a) (5 P) Was verstehen wir unter einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Geben Sie die Definition und eine äquivalente Charakterisierung an.

(b) (10 P) Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass auch $K \times L$ im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kompakt ist.

(c) (7 P) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ abgeschlossen ist. Ist sie sogar kompakt?

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Eine Menge K heißt kompakt, wenn sie die Heine-Borel-Eigenschaft hat, d.h.jede Überdeckung von K durch offene Menge besitzt eine endliche Teilüberdeckung. **(3 Punkte)**

Ferner ist nach dem Satz von Heine-Borel eine Menge im $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. **(2 Punkte)**

(b) **1. Möglichkeit:** Wir benutzen den Satz von Heine-Borel.
Wir identifizieren $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^{2n}$. Dann gilt für die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$:

$$|(x, y)| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

und **(1 Punkt)** wir können den Satz von Heine-Borel benutzen.

Ist $(x_n, y_n)_n$ eine gegen (x_0, y_0) konvergente Folge in $K \times L$, so bilden $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ gegen x_0 bzw. y_0 konvergente Folgen in K bzw. L. **(2 Punkte)**

Da K und L kompakt und nach dem Satz von Heine-Borel abgeschlossen sind, gelten $x_0 \in K$ und $y_0 \in L$ und somit $(x_0, y_0) \in K \times L$. Daher ist auch $K \times L$ abgeschlossen. **(2 Punkte)**

Nach dem Satz von Heine-Borel sind K und L beschränkt, d.h. es gibt $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$ mit $K \subset B^n(0, r_1)$ und $L \subset B^n(0, r_2)$. **(2 Punkte)**

Daraus folgt $K \times L \subset B^n(0, r_1) \times B^n(0, r_2) \subset B^{2n}(0, R)$, wobei $R > 0$ groß genug gewählt wird. Damit ist $K \times L$ beschränkt. **(1 Punkt)**

Wähle z.B. $R := \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, denn ist $(x, y) \in B^n(0, r_1) \times B^n(0, r_2)$, so ist

$$\|(x, y)\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < \sqrt{r_1^2 + r_2^2}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Nach dem Satz von Heine-Borel ist $K \times L$ kompakt. **(1 Punkt)**

Teil	Punkte
Norm auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$	1
Abgeschlossenheit $K \times L$	2+2
Beschränktheit $K \times L$	2+1
Radius R	1
Erwähnung/Benutzung von Satz von Heine-Borel	1
Insgesamt:	**1+2+2+2+1+1+1=10**

2. Möglichkeit: Wir benutzen die Heine-Borel-Eigenschaft.

Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von $K \times L$ durch offene Teilmengen U_i des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Für ein $U_i \in \mathcal{U}$ seien $V_i := p_x(U_i)$ und $W_i := p_y(U_i)$ die Projektionen von U_i auf die x-Achse bzw. die y-Achse (Genauer $p_x(x, y) = x$ und $p_y(x, y) = y$). **(4 Punkte)**

Dann sind $\mathcal{V} := \{V_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{W} := \{W_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckungen von K bzw. L, die aufgrund der Kompaktheit die endlichen Teilüberdeckungen $\{V_i\}_{i\in I_1}$ und $\{W_i\}_{i\in I_2}$ besitzen, wobei I_1, I_2 endliche Indexmengen von I sind. **(2 Punkte)**

Die endliche Teilüberdeckung zu $\mathcal{U}$ gewinnt man nun durch die Teilüberdeckung $\{U_i\}_{i\in I_1\cup I_2}$. **(1 Punkt)**

Denn ist $(x, y) \in K \times L$ beliebig, so gibt es ein $i_1 \in I_1$ und ein $i_2 \in I_2$ mit $x \in V_{i_1}$ und $y \in W_{i_2}$. Daher ist

$$(x, y) \in V_{i_1} \times W_{i_2} \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \subset \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} U_i$$

Daher ist $K \times L \subset \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} U_i$. **(3 Punkte)**

Teil	Punkte
Konstruktion: Überdeckung von K und L	4
TÜ von Überdeckung von K und L	2
Angabe endliche TÜ von $K \times L$	1
Begründung, dass TÜ eine Ü von $K \times L$ ist	3
Insgesamt:	**4+2+1+3=10**

(c) Sei $(a_n)_n = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit Grenzwert $a = (x_0, y_0)$. Dann ist

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} |x_n| - |y_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n| - |\lim_{n\to\infty} x_n| = |x_0| - |y_0|, \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

denn erstens ist $|x_n| - |y_n| \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ **(1 Punkt)** und zweitens ist der Betrag $|\cdot|$ stetig auf $\mathbb{R}$ **(1 Punkt)**. Daher ist $a \in A$ **(1 Punkt)**.

Nach dem Satz von Heine-Borel ist A ist nicht kompakt, da A nicht beschränkt ist. **(1 Punkt)**

Genauer: $a_n = (1, n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. **(1 Punkte)**

Teil	Punkte
$\lvert x_0\rvert \leq \lvert y_0\rvert$	2
$\lvert y_n\rvert \leq \lvert y_n\rvert$ für alle n	1
Betrag $\lvert \cdot \rvert$ stetig	1
Schlussfolgerung $a \in A$, A abgeschlossen	1
Erwähnung/Benutzung Satz von Heine Borel	1
Argument Unbeschränktheit A	1
Insgesamt:	**2+1+1+1+1+1=7**

Alternative: $U := \mathbb{R}^2 \setminus A$ ist offen, denn $f(x,y) := |x| - |y|$ ist stetig als Summe zweier stetiger Funktionen **(1 Punkt)**. Sei $(x_0, y_0) \in U$. Sei $\varepsilon := -f(x_0, y_0) > 0$. **(1 Punkt)** Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$ gilt:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < -f(x_0,y_0) = \varepsilon$$

(1 Punkt) Insbesondere gilt

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) < -f(x_0,y_0),$$

also $f(x,y) < 0$. D.h. $B((x_0,y_0),\delta) \subset U$ **(1 Punkt)**, und damit ist U offen. **(1 Punkt)** Nach dem Satz von Heine-Borel ist A ist nicht kompakt, da A nicht beschränkt ist. **(1 Punkt)**

Genauer: $a_n = (1,n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. **(1 Punkte)**

Teil	Punkte
$f(x,y) := \|x\| - \|y\|$ ist stetig	1
$\varepsilon := -f(x_0,y_0) > 0$	1
$\|f(x,y) - f(x_0,y_0)\| < -f(x_0,y_0)$	1
$B((x_0,y_0),\delta) \subset U$	1
Schlussfolgerung U offen	1
Erwähnung/Benutzung Satz von Heine Borel	1
Argument Unbeschränktheit A	1
Insgesamt:	**1+1+1+1+1+1+1=7**

Aufgabe 2 (26 P)

(a) (3 P) Formulieren Sie die Kettenregel für Abbildungen in mehreren Veränderlichen.

(b) (8 P) Seien $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x,y) = x - y$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\psi(t) = \big(\cos(2t),\ -\log(t^2),\ \sqrt{t}\big)$ gegeben. Geben Sie eine größtmögliche offene Menge U an, auf der $\psi \circ \gamma$ differenzierbar ist (ohne Beweis). Berechnen Sie dort $D(\psi \circ \gamma)(x,y)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(c) (15 P) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{x/2}(x + y^2).$$

Sind sie auch globale Extrema?

Hinweis: Ein lokales Minimum (x_0,y_0) heißt globales Minimum von f, falls $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist. Analog wird ein globales Maximum definiert.

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $f(U) \subset V$. Ferner seien g an der Stelle $x_0 \in U$ und f an der Stelle $y_0 := g(x_0)$ differenzierbar. **(1 Punkt)** Dann ist die Komposition $f \circ g : U \to \mathbb{R}^l$ in x_0 differenzierbar **(1 Punkt)**, und es gilt

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(y_0) \cdot Dg(x_0). \quad \textbf{(1 Punkt)}.$$

Teil	Punkte
Voraussetzungen	1
Komposition differenzierbar	1
Formel	1
Insgesamt:	**1+1+1=3**

(b) Die Komposition ist wegen des Logarithmus in der zweiten und der Wurzel in der dritten Komponente von ψ nur für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x-y>0$ differenzierbar, d.h.

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}. \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Es sind

$$D\gamma(x,y) = \begin{pmatrix} 1, -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

und

$$D\psi(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ -\frac{2}{t} \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D(\psi\circ\gamma)(x,y) &= D\psi(\gamma(x,y)) \cdot D\gamma(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin(x-y) \\ -\frac{2}{x-y} \\ \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin(x-y) & 2\sin(x-y) \\ -\frac{2}{x-y} & \frac{2}{x-y} \\ \frac{1}{2\sqrt{x-y}} & -\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Teil	**Punkte**
Definitionsbereich U	2
Differential γ	1
Differential ψ	3
Kettenregel	1
Differential $\psi\circ\gamma$	1
Insgesamt:	**2+1+3+1+1=8**

(c) Die Funktion ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem (offenen) Definitionsbereich. Wir prüfen also auf kritische Punkte und berechnen zunächst den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \big(\frac{1}{2}(y^2+x+2)e^{x/2},\ 2ye^{x/2}\big) = (0,0) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort, dass $y=0$ sein muss. Eingesetzt in die erste liefert $x=-2$. Daraus folgt $(x,y)=(-2,\ 0)$ als einzige kritische Stelle. **(2 Punkte)**

Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(y^2+x+4)e^{x/2} & ye^{x/2} \\ ye^{x/2} & 2e^{x/2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

Die kritische Stelle eingesetzt ergibt die Matrix

$$H_f(-2,\ 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \textbf{(2 Punkte)}$$

Der Eintrag oben links ist echt positiv, die Determinante lautet

$$\det H_f(-2,\ 0) = e^{-2}$$

und ist ebenfalls positiv. Daher ist $H_f(-2,\ 0)$ positiv definit **(2 Punkte)**, und f hat in $(-2,0)$ ein lokales Minimum. **(1 Punkt)**

Es ist $f(x,y) \geq xe^{x/2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Die Funktion $h(x) := xe^{x/2}$ hat in $x = -2$ ein lokales Minimum. Auf $(-\infty, -2)$ ist sie streng monoton fallend, auf $(-2, +\infty)$ streng monoton steigend. Daher ist das Minimum $x = -2$ von h sogar global. Daraus folgt

$$f(x,y) \geq h(x) \geq h(-2) = f(-2,0) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Das Minimum $(x,y) = (-2,0)$ von f ist sogar global. **(3 Punkte)**

Teil	**Punkte**
Partielle Ableitungen	2
$y = ...$ und $x = ...$	2
Hesse-Matrix allgemein	3
Hesse-Matrix an kritischer Stelle	2
Wieso ist Hesse positiv definit?	2
Folgerung lokales Minimum	1
Argumentation globales Minimum	3
Insgesamt:	**2+2+3+2+2+1+3=15**

Aufgabe 3 (26 P)

(a) (3 P) Wie lautet die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren? Liefert sie ein hinreichendes oder notwendiges Kriterium für relative Extrema?

(b) (14 P) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren den Abstand von

$$C = \{x^2 + y^2 = z^2\} \cap \{x^2 + y^2 + x^2y^2 = 8\}$$

zum Ursprung, indem Sie die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung C minimieren. Warum erhält man so den gesuchten Abstand?

(c) (9) Kann man die Menge

$$M = \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 : u^2 - v^2 - 2x\log(-v) + 3y = 3\}$$

lokal nahe $(x,y,u,v) = \big(2,1,1,-1\big)$ als Graph einer Funktion $v = g(x,y,u)$ schreiben? Falls ja, wie lautet das Differential von g in $p = (2,1,1)$?

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Hat f in a ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = \ldots = g_m(x) = 0$, so gibt es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\mathrm{grad} f(a) = \lambda_1 \mathrm{grad} g_1(a) + \ldots + \lambda_m \mathrm{grad} g_m(a)$$

Die Methode ist lediglich eine notwendige Bedingung für relative Extrema. **(2+1 Punkte)**

(b) Wir minimieren die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da C kompakt ist, nimmt f auf C Extremstellen an.

Da der Abstand von C zum Ursprung gleich

$$d(0,C) = \inf\{|(x,y,z)| : (x,y,z) \in C\}$$

ist, müssen wir die Euklidische Norm

$$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

unter der Nebenbedingung C minimieren. Der Einfachheit halber reicht es aber auch, anstelle der Wurzel $|(x,y,z)|^2 = f(x,y,z)$ zu minimieren. **(1 Punkt)**
Es sind

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

und

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ -2z), \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (2x+2xy^2,\ 2y+2x^2y,\ 0)$$

Nach dem Satz von Lagrange gibt es zwei Zahlen λ und μ aus $\mathbb{R}$ mit

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(2x,\ 2y,\ -2z) + \mu(2x+2xy^2,\ 2y+2x^2y,\ 0) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aus der letzten Komponente folgern wir direkt, dass $2z = -2z\lambda$ sein muss.

Angenommen, $z = 0$. Dann folgt aus der ersten Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 0$. Das ist nur möglich, falls $x = y = 0$. Das passt dann aber nicht zur zweiten Nebenbedingung. **(1 Punkt)**
Sei $z \neq 0$. Dann folgt $\lambda = -1$ und damit

$$2x = -2x + \mu(2x+2xy^2) \qquad \text{und} \qquad 2y = -2y + \mu(2y+2x^2y)$$

bzw.

$$4x = \mu(2x+2xy^2) \qquad \text{und} \qquad 4y = \mu(2y+2x^2y)$$

Das führt zur Gleichung

$$2xy(1+x^2) = 2xy(1+y^2)$$

Sind $x = 0$ oder $y = 0$, so wird die Gleichung gelöst.
Im Falle $x = 0$ ist wegen der zweiten NB $y^2 = 8$, und dann wegen der ersten $z^2 = 8$.
Analog $y = 0$. Das ergibt die vier Punkte $(0, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{8})$ und die vier Punkte $(\pm\sqrt{8}, 0, \pm\sqrt{8})$.
(4 Punkte)
Sind weder x noch y gleich Null, so erhalten wir die Gleichung

$$1 + x^2 = 1 + y^2,$$

also $x^2 = y^2$. Das setzen wir in die zweite Nebenbedingung ein und erhalten

$$8 = x^2 + y^2 + x^2y^2 = y^2 + y^2 + y^2y^2 = 2y^2 + y^4$$

Die pq-Formel liefert $y^2 = -1 \pm 3$. Nur der positive Teil löst die Gleichung, also $y^2 = 2$, und daher $x^2 = 2$ und wegen der ersten Nebenbedingung $z^2 = 4$.
Das ergibt die 8 Punkte $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm 2)$. **(4 Punkte)**
Wir setzen alle Punkte in f ein und erhalten

$$f(0, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{8}) = f(\pm\sqrt{8}, 0, \pm\sqrt{8}) = 16 > f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm 2) = 8$$

(1 Punkt) Die relativen Minima werden folglich in den Punkten $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm 2)$ angenommen. Der Abstand ist gleich $\sqrt{8}$. **(1 Punkt)**

Teil	Punkte
Begründung, weshalb f	1
Satz von Lagrange	2
Fall $z = 0$	1
Minima	4
Maxima	4
Argument Maximum oder Minimum	1
Abstand	1
Insgesamt:	**1+2+1+4+4+1+1=14**

(c) Wir setzen

$$f(x, y, z) := u^2 - v^2 - 2x\log(-v) + 3y$$

Wir müssen prüfen, ob

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1, 1, -1)$$

vollen Rang hat bzw. nicht verschwindet, damit wir den Satz über implizite Funktionen anwenden und die Menge in der gewünschten Form schreiben können **(1 Punkt)**. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, u, v) = -2v + \frac{2x}{v} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1, 1, -1) = 2 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -2 \neq 0 \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Für das gesuchte Differential benötigen wir

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y, u)}(x, y, u, v) = \big(-2\log(-v),\ 3,\ 2u \big) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y, u)}(2, 1, 1, -1) = \big(0,\ 3,\ 2\big) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Dann ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\frac{\partial g}{\partial(x, y, u)}(p) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1, 1, -1)} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x, y, u)}(2, 1, 1, -1)$$

$$= -\frac{(0, 3, 2)}{-2} = (0, 1.5, 1) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Teil	Punkte
Erwähnung Satz über implizite Funktionen	1
Ableitung von f nach v	1
Ableitung von f nach v in $(2, 1, 1, -1)$	1
Ableitung von f nach (x, y, u)	2
Ableitung von f nach (x, y, u) in $(2, 1, 1, -1)$	2
Ableitung von g nach (x, y, u) in $(2, 1, 1)$	2
Insgesamt:	**1+1+1+2+2+2=9**

Aufgabe 4 (12 P)

(a) (7 P) Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z + y^2 \leq 3\}$$

Hinweis: Evtl. können Sie benutzen, dass $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \frac{\pi a^2}{2}$ *ist.*

(b) (5 P) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2\sin(x) - \sin(x)y = y', \quad y(0) = -1.$$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Wir schreiben K als Normalbereich.

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2,\ |y| \leq \sqrt{4-x^2},\ -y^2 \leq z \leq 3-y^2\} \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Dann ist

$$|K| = \int_K d(x,y,z) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-y^2}^{3-y^2} dz\ dy\ dx \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \underbrace{(3 - y^2 + y^2)}_{=3}\ dy\ dx \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 6 \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 6 \cdot \frac{4\pi}{2} = 12\pi \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

Teil	**Punkte**
K als Normalbereich	2
Integral aufstellen	1
Nach z integrieren	1
Nach y integrieren	1
Nach x integrieren	1
Endergebnis	1
Insgesamt:	**2+1+1+1+1+1=7**

Alternative:
Seien $P = \{(r,\varphi,h) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -r^2\sin^2(\varphi) \leq h \leq 3 - r^2\sin^2(\varphi)\}$ und

$$\Psi(r,\varphi,h) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Zylinderkoordinaten von K, d.h. $\Psi(P) = K$.
Dann ist mit der Transformationsformel

$$|K| = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-r^2\sin^2(\varphi)}^{3-r^2\sin^2(\varphi)} r\ dh\ d\varphi\ dr \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\,\underbrace{(3 - \sin^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=3}\ d\varphi\ dr \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 3\int_0^2 2\pi r\ dr \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 6\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{2} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 12\pi \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Teil	Punkte
K in Zylinderkoordinaten (P beschreiben)	2
Integral aufstellen	1
Nach r integrieren	1
Nach φ integrieren	1
Nach h integrieren	1
Endergebnis	1
Insgesamt:	**2+1+1+1+1+1=7**

(b) Da wir $y(0) = -1$ wollen, können wir annehmen, dass y nahe 0 ungleich 2 ist. Daher stellen wir zunächst um und teilen durch $2 - y$

$$\sin(x)(2-y) = y' \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{y'}{2-y} \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

integrieren

$$-\cos(x) + C = -\ln(2-y) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - C = \ln(2-y) \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

und wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an

$$e^{\cos(x)-C} = 2 - y \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 - Ae^{\cos(x)} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

(mit $A = e^{-C}$).
Wollen wir nun $y(0) = -1$, so müssen wir $A = 3e^{-1}$ setzen. **(1 Punkt)**

Teil	Punkte
Trennen der Variablen	1
Kürzen	1
Integrieren	1
Wurzel ziehen	1
C bestimmen	1
Insgesamt:	**1+1+1+1+1=5**