**BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL**

31.07.17

**Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften**
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

# Klausur zur Analysis 2, SoSe 2017

**Aufgabe 1 (22 P)**

(a) (5 P) Was ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum $V$, und wie kann man mit ihrer Hilfe eine Metrik auf $V$ erzeugen?

(b) (11 P) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\|(X,Y)\| := \|X\| + \|Y\|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definiert.

(c) (6 P) Zeigen Sie, dass die nachfolgende Menge $U$ offen ist.

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y^3 - x^2| > 1\}$$

**Lösungen zu Aufgabe 1**

(a) Unter einer Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ verstehen wir eine Funktion, die folgende Punkte erfüllt:

1. $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ **(2 Punkte)**
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1 Punkt)**
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ **(1 Punkt)**

Eine Metrik auf $V$ erhält man, indem man $d(v,w) := \|v - w\|$ setzt (Begründung nicht notwendig). **(1 Punkt)**

| Teil | Punkte |
|---|---|
| Axiom 1 | 2 |
| Axiom 2 | 1 |
| Axiom 3 | 1 |
| Norm $\Rightarrow$ Metrik | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+1+1+1=5** |

(b) Wir zeigen die Axiome aus Teil (a).

1. Da $\|X\| \geq 0$ und $\|Y\| \geq 0$ für alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$, ist auch $\|(X,Y)\| = \|X\| + \|Y\| \geq 0$ für all $(X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. **(2 Punkte)**
   Sind $X = 0$ und $Y = 0$, so ist $\|(X,Y)\| = \|X\| + \|Y\| = 0 + 0 = 0$. **(1 Punkte)**
   Ist andererseits $0 = \|(X,Y)\| = \|X\| + \|Y\|$, so muss wegen $\|X\| \geq 0$ und $\|Y\| \geq 0$ bereits $\|X\| = 0$ und $\|Y\| = 0$ gelten. Also $X = 0$ und $Y = 0$. **(2 Punkte)**
2. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|\lambda(X,Y)\| = \|(\lambda X, \lambda Y)\| = \|\lambda X\| + \|\lambda Y\| = |\lambda| \cdot \|X\| + |\lambda| \cdot \|Y\|$$

$$= |\lambda|(\|X\| + \|Y\|) = |\lambda| \cdot \|(X,Y)\|$$

**(3 Punkte)**

3. Seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|(X_1, Y_1) + (X_2, Y_2)\| = \|(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)\| \leq \|X_1 + X_2\| + \|Y_1 + Y_2\|$$

$$\leq \|X_1\| + \|X_2\| + \|Y_1\| + \|Y_2\| = \|X_1\| + \|Y_1\| + \|X_2\| + \|Y_2\|$$

$$= \|(X_1, Y_1)\| + \|(X_2, Y_2)\|$$

**(3 Punkte)**

| Teil | Punkte |
|---|---|
| Axiom 1 | 5 |
| Axiom 2 | 3 |
| Axiom 3 | 3 |
| **Insgesamt:** | **5+3+3=11** |

(c) Sei $A$ das Komplement von $U$ im $\mathbb{R}^2$, also

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y^3 - x^2| \leq 1\}$$

Sei ferner $(a_n)_n = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A$ mit Grenzwert $a = (x_0, y_0)$. Dann ist

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} |y_n^3 - x_n^2| = |\lim_{n\to\infty} (y_n^3 - x_n^2)| = |y_0^3 - x_0^2|, \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

denn erstens ist $|y_n^3 - x_n^2| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ **(1 Punkt)** und zweitens sind der Betrag $|\cdot|$ und die positiven Potenzen stetig auf $\mathbb{R}$ **(1 Punkt)**. Daher ist $a \in A$ **(1 Punkt)**. Da $A$ abgeschlossen ist, ist $U$ offen. **(1 Punkt)**

| Teil | Punkte |
|---|---|
| $\|y_0^3 - x_0^2\| \leq 1$ | 2 |
| $\|y_n^3 - x_n^2\| \geq 1$ für alle $n$ | 1 |
| Betrag $\|\cdot\|$ stetig | 1 |
| Schlussfolgerung $a \in A$, $A$ abegschlossen | 1 |
| Schlussfolgerung $U$ offen | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+1+1+1+1=6** |

**Alternative:** $f(x, y) := |y^3 - x^2|$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$. **(1 Punkt)** Sei $(x_0, y_0) \in U$. Sei $\varepsilon := f(x_0, y_0) - 1 > 0$. **(1 Punkt)** Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ gilt:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < f(x_0, y_0) - 1$$

**(1 Punkt)** Insbesondere gilt

$$1 - f(x_0, y_0) < f(x, y) - f(x_0, y_0),$$

also $1 < f(x, y)$. D.h. $B((x_0, y_0), \delta) \subset U$ **(1 Punkt)**, und damit ist $U$ offen. **(1 Punkt)**

| Teil | Punkte |
|---|---|
| $f(x, y) := \|y^3 - x^2\|$ ist stetig | 1 |
| $\varepsilon := f(x_0, y_0) - 1 > 0$ | 1 |
| $\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| < f(x_0, y_0) - 1$ | 1 |
| $B((x_0, y_0), \delta) \subset U$ | 1 |
| Schlussfolgerung $U$ offen | 1 |
| **Insgesamt:** | **1+1+1+1+1=5** |

**Aufgabe 2 (26 P)**

(a) (2 P) Wann nennen wir eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ total differenzierbar in $x_0$ ?

(b) (11 P) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^8}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ist die Funktion $f$ total differenzierbar im Ursprung? Bestimmen Sie in diesem Falle den Gradienten von $f$. Berechnen Sie ferner die Richtungsableitungen $D_v f(0,0)$ von $f$ für eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ ?

(c) (13 P) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{y\sqrt{x}}{2} - y^2 - x + 15y.$$

**Lösungen zu Aufgabe 2**

(a) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ heißt differenzierbar in $x_0$, falls es eine $(k \times n)$-Matrix und eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} = 0$ **(1 Punkt)** gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. **(1 Punkt)**

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| $\varphi$ | 1 |
| $f(x) = ...$ | 1 |
| **Insgesamt:** | **1+1=2** |

(b) Wäre sie total differenzierbar in $(0,0)$, so würden die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ existieren,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

und es gäbe ein $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ und

$$f(x,y) = f(0,0) + 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + \varphi(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir setzen also $A = (0,0)$ und $\varphi(x,y) = f(x,y)$ **(2 Punkte)** und sehen, dass gilt:

$$0 \leq \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2y^8}{x^2 + y^2} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Der letzte Term ist kleiner gleich $\frac{x^2y^8}{x^2} = y^8$ für $x \neq 0$ oder $\frac{x^2y^8}{y^2} = x^2y^6$ für $y \neq 0$ **(2 Punkte)**. Geht $(x,y) \to (0,0)$, so muss also auch $\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ gegen 0 gehen. Daher ist $f$ in $(0,0)$ total differenzierbar. **(1 Punkt)**
Der Gradient lautet daher $A = \nabla f(0,0) = (0,0)$. **(1 Punkt)**

Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt für jede Reichtung $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, dass

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0)v = 0$$

ist, da $f$ total differenzierbar in $(0,0)$ ist. **(2 Punkte)**
Alternative: Man rechnet direkt aus:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1^2 t^8 v_2^8}{t \cdot \sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}} = \lim_{t\to 0} t^6 f(v_1, v_2) = 0. \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| Partielle Ableitungen | 2 |
| $A$ und $\varphi$ definiert | 2 |
| $A$ und $\varphi$ eingesetzt | 1 |
| Abschätzungen mit Fallunterscheidung | 2 |
| Limes bzw. Schlussfolgerung | 1 |
| Gradient | 1 |
| Satz aus VL oder Formel $D_v f$ | 1 |
| Ergebnis $D_v f(0,0) = 0$ | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+2+1+2+1+1+1+1=11** |

(c) Die Funktion ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem (offenen) Definitionsbereich. Wir prüfen also auf kritische Punkte und berechnen zunächst den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{y}{4\sqrt{x}} - 1,\ \frac{\sqrt{x}}{2} - 2y + 15\Big) = (0,0) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = 4\sqrt{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y}{4} = \sqrt{x} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Das setzen wir in die zweite Gleichung ein:

$$\frac{y}{8} - 2y + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - 16y + 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -15y + 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 8 \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Daraus folgt $(x,y) = (4,\ 8)$ als einzige kritische Stelle. **(1 Punkt)**
Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{8x\sqrt{x}} & \frac{1}{4\sqrt{x}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & -2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

Die kritische Stelle eingesetzt ergibt die Matrix

$$H_f(4,\ 8) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{8\cdot 4\sqrt{4}} & \frac{1}{4\sqrt{4}} \\ \frac{1}{4\sqrt{4}} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -2 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag oben links ist echt negativ **(1 Punkt)**, die Determinante lautet

$$\det H_f(4,\ 8) = \frac{16}{64} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

und ist positiv **(1 Punkt)**. Daher ist $H_f(4,\ 8)$ negativ definit und hat $f$ in $(4,8)$ ein lokales Maximum. **(1 Punkt)**

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| Partielle Ableitungen | 2 |
| Zusammenhang $x$ und $y$ | 1 |
| $y = ...$ und $x = ...$ | 2 |
| Kritische Stelle | 1 |
| Hesse-Matrix | 3 |
| Determinante berechnet | 1 |
| Wieso ist Hesse negativ definit? | 2 |
| Folgerung lokales Maximum | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+1+2+1+3+1+2+1=13** |

**Aufgabe 3 (26 P)**

(a) (2 P) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $k$-mal differenzierbare Funktion. Wie ist das Taylor-Polynom von $f$ der Ordnung $k$ an der Stelle $c \in \mathbb{R}^n$ definiert?

(b) (15 P) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren den Abstand von

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2 + z = 1\} \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2\}$$

zum Ursprung, indem Sie die Funktion $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ unter der Nebenbedingung $C$ minimieren. Warum erhält man so den gesuchten Abstand?

(c) (9 P) Kann man die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(zx) = 1\}$$

lokal nahe $p = \left(\sqrt{\pi},\ 0,\ \sqrt{\pi}\right)$ als Graphen einer Funktion $z = g(x, y)$ schreiben? Falls ja, wie lautet das Differential von $g$ in $(\sqrt{\pi},\ \sqrt{\pi})$?

**Lösungen zu Aufgabe 3**

(a) Es ist definiert als

$$T_{f,c,k}(x) = \sum_{m=0}^{k} \Big( \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \Big) = \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

**(2 Punkte)**

(b) Wir minimieren die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2y^2 + z - 1 \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $C$ kompakt ist, nimmt $f$ auf $C$ Extremstellen an.
Da der Abstand von $C$ zum Urpsrung gleich

$$d(0, C) = \inf\{|(x, y, z)| : (x, y, z) \in C\}$$

ist, müssen wir die Euklidische Norm

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

unter der Nebenbedingung $C$ minimieren. Der Einfachheit halber reicht es aber auch, anstelle der Wurzel $|(x, y, z)|^2 = f(x, y, z)$ zu minimieren. **(1 Punkt)**
Es sind

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

und

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2xy^2,\ 2x^2y,\ 1), \qquad \nabla g_2(x, y, z) = (2x,\ 2y,\ 0)$$

Nach dem Satz von Lagrange gibt es zwei Zahlen $\lambda$ und $\mu$ aus $\mathbb{R}$ mit

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(2xy^2,\ 2x^2y,\ 1) + \mu(2x,\ 2y,\ 0) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aus der letzten Komponente folgern wir direkt, dass $2z = \lambda$ sein muss.

Angenommen, $z = 0$. Dann folgt aus der ersten Nebenbedingung $x^2y^2 = 1$. Die zweite NB dort eingesetzt ergibt

$$1 = x^2(2 - x^2) = 2x^2 - x^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 + 2 = 0$$

Auflösen nach $x$ ergibt $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$.

Aus der 2. NB folgt dann $y^2 = 1$ bzw. $y = \pm 1$.

Daher sind die 4 Punkte $(\pm 1, \pm 1, 0)$ Extremstellen und potentielle Minima. Es ist $f(\pm 1, \pm 1, 0) = 2$. **(4 Punkte)**

Sei $z \neq 0$. Dann folgt mit $\lambda = 2z$, dass

$$2x = 4xy^2z + 2x\mu \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 4x^2yz + 2y\mu$$

Wir nehmen $x = 0$ an. Dann sind $y^2 = 2$ und $z = 1$. In diesem Fall ist $f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = 3$. Analog folgern wir für den Fall $y = 0$, dass $f(\pm\sqrt{2}, 0, 1) = 3$ ist. **(5 Punkte)**

Sind $x, y, z \neq 0$, so kürzen wir die NB durch $x$ bzw. $y$ und erhalten

$$1 = 2y^2z + \mu \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2x^2z + \mu$$

Das ergibt zusammen $0 = z(x^2 - y^2)$. Da $z \neq 0$, gibt das $x^2 = y^2$. Aus der 2. NB folgt $x^2 = 1$, also auch $y^2 = 1$, und dann aus der 1. NB $z = 0$. Den Fall hatten wir aber schon oben. **(1 Punkt)**
Insgesamt sind die vier Punkte $(\pm 1, \pm 1, 0)$ Minima, denn:

$$f(\pm 1, \pm 1, 0) = 2 < 3 = f(0, \pm\sqrt{2}, 1) \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Der Abstand ist also gleich $\sqrt{2}$ **(1 Punkt)**.

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| Begründung, weshalb $f$ | 1 |
| Satz von Lagrange | 2 |
| Minima | 4 |
| Maxima | 5 |
| Restliche Fälle | 1 |
| Argument Maximum oder Minimum | 1 |
| Abstand | 1 |
| **Insgesamt:** | **1+2+4+5+1+1+1=15** |

(c) Wir setzen $p := (\sqrt{\pi},\ 0,\ \sqrt{\pi})$ und

$$f(x, y, z) := \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(zx) - 1$$

Wir müssen prüfen, ob

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

vollen Rang hat bzw. nicht verschwindet, damit wir den Satz über implizite Funktionen anwenden können und die Menge in der gewünschten Form schreiben können **(1 Punkt)**.
Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(yz) + x\cos(xz) \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0 \cdot \cos(0) + \sqrt{\pi}\cos(\pi) = -\sqrt{\pi} \neq 0 \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Für das gesuchte Differential benötigen wir

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,z) = \big(y\cos(xy) + z\cos(xz),\ x\cos(xy) + z\cos(yz)\big) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(p) = \big(0 + \sqrt{\pi}\cos(\pi),\ \sqrt{\pi}\cos(0) + \sqrt{\pi}\cos(0)\big) = \big(-\sqrt{\pi},\ 2\sqrt{\pi}\big) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Dann ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(p) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(p)} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(p) = -\frac{(-\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi})}{-\sqrt{\pi}} = (1,-2) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| Erwähnung Satz über implizite Funktionen | 1 |
| Ableitung von $f$ nach $z$ | 1 |
| Ableitung von $f$ nach $z$ in $p$ | 1 |
| Ableitung von $f$ nach $(x,y)$ | 2 |
| Ableitung von $f$ nach $(x,y)$ in $p$ | 2 |
| Ableitung von $g$ nach $(x,y)$ in $p$ | 2 |
| **Insgesamt:** | **1+1+1+2+2+2=9** |

**Aufgabe 4 (12 P)**

(a) (7 P) Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1-z)^2,\ |z| \leq 1\}.$$

*Hinweis: Evtl. können Sie benutzen, dass* $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \frac{\pi a^2}{2}$ *ist.*

(b) (5 P) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$xy^3y' = y(1-x), \quad y(1) = 1.$$

**Lösungen zu Aufgabe 4**

(a) Wir schreiben $K$ als Normalbereich.

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1,\ |x| \leq 1-z,\ |y| \leq \sqrt{(1-z)^2 - x^2}\} \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Dann ist

$$|K| = \int_K d(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \int_{z-1}^{1-z} \int_{-\sqrt{(1-z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-x^2}} dy\ dx\ dz \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \int_{z-1}^{1-z} \sqrt{(1-z)^2 - x^2}\ dx\ dz \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{\pi(1-z)^2}{2}\ dz = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-z)^2\ dz \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \pi\Big[-\frac{(1-z)^3}{3}\Big]_{z=-1}^{1} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \frac{8\pi}{3} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

| Teil | Punkte |
|---|---|
| $K$ als Normalbereich | 2 |
| Integral aufstellen | 1 |
| Nach $y$ integrieren | 1 |
| Nach $x$ integrieren | 1 |
| Nach $z$ integrieren | 1 |
| Endergebnis | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+1+1+1+1+1=7** |

**Alternative:** Seien $P = \{(r,\varphi,h) : 0 \leq r \leq 1-h,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ |h| \leq 1\}$ und

$$\Psi(r,\varphi,h) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h) \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Zylinderkoordinaten von $K$, d.h. $\Psi(P) = K$.
Dann ist mit der Transformationsformel

$$|K| = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1-h} r\ dr\ d\varphi\ dh \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{1-h} d\varphi\ dh$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{(1-h)^2}{2} d\varphi\, dh \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{(1-h)^2}{2}\, dh \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \pi\Big[-\frac{(1-h)^3}{3}\Big]_{h=-1}^{1} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \frac{16\pi}{3} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| $K$ in Zylinderkoordinaten ($P$ beschreiben) | 2 |
| Integral aufstellen | 1 |
| Nach $r$ integrieren | 1 |
| Nach $\varphi$ integrieren | 1 |
| Nach $h$ integrieren | 1 |
| Endergebnis | 1 |
| **Insgesamt:** | **2+1+1+1+1+1=7** |

(b) Da wir $y(1) = 1$ wollen, können wir annehmen, dass nahe 1 die Funktion $y \neq 0$ ist. Wir trennen die Variablen in der DGL um:

$$\frac{y^3 y'}{y} = \frac{1-x}{x}, \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

kürzen

$$y^2 y' = \frac{1}{x} - 1, \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

integrieren

$$\frac{y^3}{3} = \ln|x| - x + C, \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

und ziehen schließlich die 3-te Wurzel

$$y = \sqrt[3]{3\ln|x| - 3x + 3C} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Wollen wir $y(1) = 1$, so müssen wir $C = 4/3$ setzen. **(1 Punkt)**

| **Teil** | **Punkte** |
|---|---|
| Trennen der Variablen | 1 |
| Kürzen | 1 |
| Integrieren | 1 |
| Wurzel ziehen | 1 |
| $C$ bestimmen | 1 |
| **Insgesamt:** | **1+1+1+1+1=5** |