BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

31.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Tutorium zur Analysis 2, SoSe 2017

Tutorium 7

Aufgabe 1 (Richtungsableitung)

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y) := x^3\sin(y)$ an der Stelle $(4,\pi)$ in Richtung $(1,2)$.

(b) Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Existiert die Richtungsableitung von g im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(3,1)$?

Aufgabe 2 (Mittelwertsatz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Seien $f,g\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $Df(x) = Dg(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}^m$, so dass $f = g + C$ auf U gilt.

(b) Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $Df(x) = A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für alle $x \in U$. Dann ist f bereits affin-linear.

Aufgabe 3 (Operatornorm) Sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ mit $\|A\| := \sup\{|Ax|\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$ die Operatornorm. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gelten folgende Aussagen:

(a) $\|A\| = \sup\{|Ax|\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\} = \sup\left\{\frac{|Ax|}{|x|}\colon x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0\right\}$.

(b) $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.