BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

10.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Tutorium zur Analysis 2, SoSe 2017

Tutorium 4

Aufgabe 1 (glm. Stetigkeit)

Definiere für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \frac{1}{nx}.$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig stetig, aber nicht gleichmäßig konvergent auf $(0,1)$ ist.

Aufgabe 2 (glm. Konvergenz) Sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \Big(\exp(-n)\sin x, \frac{x}{n}\Big).$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf punktweise und (lokal) gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3 (Kompaktheit) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K_1 := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

nicht kompakt, aber die Menge $K_2 := K_1 \cup \{0\}$ kompakt ist.

Aufgabe 4 (Kompaktheit, glm. Konvergenz) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f_k\colon K \to \mathbb{R}^m$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen, so dass $(f_k)_k$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Beweisen Sie, dass dann bereits $(f_k)_k$ gleichmäßig gegen f auf K konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 4 Sei ein beliebiger Punkt $x \in K$ gegeben. Dann existiert eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x, so dass $(f_k)_k$ auf $K \cap U_x$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere ist $(U_x)_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, existieren sogar endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_L \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{L} U_{x_j}.$$

Sei nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Folglich gilt:

$$\forall j \in \{1, \ldots, L\}\ \exists k_j \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_j\ \forall x \in K \cap U_{x_j} \colon |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wähle nun $k_0 := \max\{k_1, \ldots, k_L\}$. Demnach gilt für alle $x \in K$ und alle $k \geq k_0$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $(f_k)_k$ auf K gleichmäßig gegen f.