BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

26.04.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Tutorium zur Analysis 2, SoSe 2017

Tutorium 2

Aufgabe 1 (Normen)

Die *Maximumnorm* ist für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2 (Topologie) Berechnen Sie für die Menge $A := [0, 1) \times [0, 1]$ das Innere A°, den Abschluss $\overline{A}$ und den Rand ∂A.

Aufgabe 3 (Topologie) Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ gilt.

(b) Gilt die Gleichheit auch für $A^\circ \cup B^\circ$ und $(A \cup B)^\circ$?

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) „$\subseteq$“ Nach der Definition des Inneren ist A° offen und es gilt $A^\circ \subseteq A$. Analog dazu ist B° eine offene Teilmenge von B. Damit ist $A^\circ \cap B^\circ$ ebenfalls offen und es gilt $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. Hieraus folgt bereits die Inklusion

$$A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

„$\supseteq$“ Per Definition des Inneren ist $(A \cap B)^\circ$ offen und es gilt die Inklusion $(A \cap B)^\circ \subseteq A \cap B$. Daraus folgen sowohl $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ als auch $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Also gilt sogar

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ.$$

(b) Analog zu Teil (a) ist A° eine offene Teilmenge von A und B° eine offene Teilmenge von B. Demnach ist $A^\circ \cup B^\circ$ eine offene Teilmenge von $A \cup B$, weshalb

$$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

resultiert.
Das die umgekehrte Inklusion nicht gelten muss, zeigen wir durch ein Gegenbeispiel: Seien die Mengen $A := \mathrm{B}(0, 1) \setminus \{0\}$ und $B := \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Demnach ist $A \cup B = \mathrm{B}(0, 1)$ offen, also folgt $(A \cup B)^\circ = A \cup B$. Außerdem geht aus $A^\circ = A$ und $B^\circ = \emptyset$ bereits $A^\circ \cup B^\circ = A$ hervor. Daher gilt $A^\circ \cup B^\circ \not\subset (A \cup B)^\circ$, weshalb die andere Inklusion im Allgemeinen nicht gilt.