BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

21.07.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 13

Übungsaufgaben

Abgabe: Keine Abgabe. Üben Sie für die Klausur insbesondere Aufgaben 1b, 2 und 4.

Aufgabe 1

(a) Punkte im $\mathbb{R}^3$ können durch *Zylinderkoordinaten* dargestellt werden. Zeigen Sie hierzu, dass die Abbildung $\Psi : (0,+\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ mit $\Psi(r,\varphi,h) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ bijektiv ist.

(b) Sei der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ gegeben. Berechnen Sie

$$\int_Z (zx^4+zy^4)\ d(x,y,z)$$

mit Hilfe von Zylinderkoordinaten und der Transformationsformel.

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Die Abbildung

$$\Psi_1 : (0,+\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

mit $\Psi_1(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ ist bijektiv ist. Es sind nämlich genau die Polarkoordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^2$. Jetzt ist es einfach zu folgern, dass auch Ψ bijektiv ist.

(b) Es ist mit Zylinderkoordinaten, dem Transformationssatz und Fubini

$$\begin{aligned}
\int_Z (zx^4+zy^4)d(x,y,z) &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 hr^5\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)drd\varphi dh \\
&= \int_0^1 h\int_0^1 r^5\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)d\varphi drdh \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos^2\varphi(1-\sin^2\varphi)+\sin^2\varphi(1-\cos^2\varphi)\big)d\varphi \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\pi}^{\pi}(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\frac{1}{2}\sin^2(2\varphi))d\varphi \\
&= \frac{1}{12}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x - y \leq 2\}$. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Transformation $T : R \to [0, 1] \times [0, 1]$ das Integral

$$\int_R (x^2 - y^2) d(x, y).$$

Lösungen zu Aufgabe 2

Sei $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x - y \leq 2\}$. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Transformation $T : R \to [0, 1] \times [0, 1]$ das Integral

$$\int_R (x^2 - y^2) d(x, y).$$

Sei $T : R \to [0, 1]^2$ definiert durch

$$T(x, y) := \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right) = (u, v).$$

Dann ist T eine lineare Abbildung mit $\det T = -\frac{1}{2} \neq 0$, also invertierbar. Die Umkehrabbildung ist

$$T^{-1} = (u + v, u - v) = (x, y).$$

Da $\det DT(x) = \det T = -\frac{1}{2} \neq 0$ ist, ist nach dem Transformationssatz und Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_R \big(x^2 - y^2\big) d(x, y) &= \int_{[0,1]^2} \big((u + v)^2 - (u - v)^2\big) \underbrace{\left|\det T^{-1}(u, v)\right|}_{=2} d(u, v) \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 \big((u + v)^2 - (u - v)^2\big) du dv \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 4uv du dv \\
&= 8 \int_0^1 u du \int_0^1 v dv \\
&= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Überprüfen Sie, ob die Differentialgleichung $y' = x^2 + xy^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ Lösungen besitzt und ob diese eindeutig sind.

(b) Sei die DGL $y' = \sqrt{|y|}$ mit $y(0) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass sie unendlich viele Lösungen besitzt, indem Sie für $t \in \mathbb{R}$ folgenden die Funktionen betrachten:

$$y_t(x) = \begin{cases} (x - t)^2/4, & x \geq t \\ 0, & x \leq t \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Wir prüfen, ob die (lokale) Lipschitz-Bedingung für die Funktion $f(x,y) = x^2 + xy^2$ erfüllt ist. Denn dann folgt aus dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf und dem Eindeutigkeitssatz die Existenz und Eindeutigkeit.

f erfüllt die Lipschitz-Bedingung, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass für alle $x, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gilt:
$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |x| \cdot |y^2 - \tilde{y}^2| \leq L|y - \tilde{y}|.$$
Es ist
$$|y^2 - \tilde{y}^2| \leq |y - \tilde{y}| \cdot |y + \tilde{y}|$$
Sei nun $R > 0$ und $(x,y), (x,\tilde{y}) \in B^2((a,b),1)$. Dann sind
$$|x - a| < 1, \quad |y - b| < 1, \quad |\tilde{y} - b| < 1$$
Daraus folgen:
$$|x| < 1 + |a|, \quad |y| < 1 + |b|, \quad |\tilde{y}| < 1 + |b|$$
Insbesondere:
$$|y + \tilde{y}| \leq |y| + |\tilde{y}| \leq 2(1 + |b|)$$
Schließlich gilt:
$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq \underbrace{2(1 + |a|)(1 + |b|)}_{=:L} |y - \tilde{y}| \leq L|y - \tilde{y}|$$
Damit erfüllt f lokal die Lipschitz-Bedingung.

(b) Für $t \geq 0$ ist $y_t(0) = 0$. Ferner ist
$$y_t'(x) = \begin{cases} (x-t)/2, & x > t \\ 0, & x < t \end{cases}$$
für $x \neq 0$. Wir berechnen
$$y_t'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y_t(t+h) - y_t(0)}{h} = 0,$$
da $\lim_{h \searrow 0} \frac{h^2}{4h} = 0$. Damit ist y_t stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. Offensichtlich ist $y_t' = \sqrt{y_t} = \sqrt{|y_t|}$, da $y_t \geq 0$. Da $t \geq 0$ beliebig war, gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4

Lösen Sie die nachstehenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ mit $y(1) = 1$

(b) $x(2+x)y' + 2(1+x)y = 1 + 3x^2$ mit $y(-1) = 1$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Man stelle um
$$yy' = -x$$
und integriere auf beiden Seiten:
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

Also $y^2 = 2C - x^2$. Da $y(1) = 1$, muss $C = 1$ sein. Dann ist

$$y = \sqrt{2 - x^2}$$

mit $|x| \leq \sqrt{2}$ die Lösung der DGL.

(b) Man stelle um

$$y' = -\frac{2(1+x)}{x(2+x)}y + \frac{1+3x^2}{x(2+x)} = a(x)y + b(x)$$

und benutze Variation der Konstanten bzw. Satz 67. Hierfür finden wir wir $A(x) = -\log|x(2+x)|$ als Stammfunktion zu $a(x)$ mit $A(-1) = 0$. Als Definitionsbereich wählen wir $(-2, 0)$, denn $-1 \in (-2, 0)$. Außerdem ist dort $x(2+x) < 0$, also $A(x) = -\log(-x(2+x))$. Es folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log|x(2+x)|}\left(1 + \int_{-1}^{x} |s(2+s)| \frac{1+3s^2}{s(2+s)}\right) \\ &= -\frac{1}{x(2+x)}\left(1 - \int_{-1}^{x} (1+3s^2)\right) = \frac{1+x+x^3}{x(x+2)} \end{aligned}$$