BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

14.07.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 12

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Integration über Normalbereiche)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 2 (Uneigentliche Integration) Überprüfen Sie

$$\int_{[1,\infty)\times[-1,2]} \frac{y}{x^2} \, \mathrm{d}(x,y)$$

auf Existenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3 (Parameterintegrale) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und Jordan-messbar. Definiere mit einer integrierbaren Funktion $g\colon K \to \mathbb{R}$ eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}$ durch

$$F(y) := \int_K \frac{g(x)}{|x-y|} \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass F harmonisch ist, also $\Delta F := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i} = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Transformationsformel) Sei $P := \{s(2,2) + t(1,2) \mid s,t \in [0,1]\}$. Berechnen Sie $\int_P xy \, \mathrm{d}(x,y)$ mittels der Transformation $x = u - v$, $y = 2u - v$.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 21.07., 10 Uhr

Hinweis:

- Die Klausur rückt näher. Bitte vergewissern Sie sich, dass Sie sich ordnungsgemäß angemeldet haben. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage.
- Beachten Sie, dass alle Themen der Vorlesung, des Tutoriums und der Übungszettel klausurrelevant sind.
- Lernen Sie wieder die wichtigsten Definitonen und Sätze, z.B. diejenigen, die einen Namen tragen. Sie müssen die Begriffe kennen, in den Gesamtzusammenhang einordnen und die Sätze und Rechentechniken anwenden können.
- Sie müssen die Beweise, die in der Vorlesung vorgestellt wurden, nicht auswendig lernen. Allerdings müssen Sie logisch schlüssig argumentieren können, also kleinere Beweise führen müssen. Das trainieren Sie am besten, indem Sie einige Beweise nacharbeiten.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_Q \frac{d(x,y)}{(x+y)^2}$ mit $Q = [1,2] \times [3,4]$

(b) $\displaystyle\int_Q \frac{y\ d(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ mit $Q = [0,1] \times [0,1]$

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) $\displaystyle\int_Q \frac{d(x,y)}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy\ dx = \ldots = \log(25) - \log(24)$

(b) $\displaystyle\int_Q \frac{y\ d(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\ dx\ dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \log(1+\sqrt{2}) - \log(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}$

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

(a) Berechnen Sie für $0 < a < b$ das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log(x)}\ dx,$$

indem Sie den Satz von Fubini auf die Funktion $f(x,y) = x^y$ anwenden. Prüfen Sie zunächst, ob f die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

(b) Überprüfen Sie, ob das „uneingentliche" Integral

$$\int_{[-1,1]\times\mathbb{R}} \frac{yx^3}{e^{y^2}}\ d(x,y)$$

existiert und berechnen Sie es.

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Die Funktion $f(x,y) = x^y$ auf dem Quader $Q = [0,1] \times [a,b]$ ist stetig und somit integrierbar. Dann gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_Q x^y d(x,y) &= \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy \\
&= \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{\log(x)} x^y\right]_a^b dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)} dx = -I(a,b).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\int_Q x^y d(x,y) &= \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy \\
&= \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy \\
&= \int_a^b \frac{dy}{1+y} \\
&= \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).
\end{aligned}$$

Also:

$$I(a,b) = -\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right) = \log\left(\frac{1+a}{1+b}\right).$$

(b) Sei $f : [-1,1]\times\mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{yx^3}{e^{y^2}}$. Für jedes $R>0$ gilt

$$\int_{[-1,1]\times[-R,R]} |f(x,y)| d(x,y) = \int_{-R}^{R}\int_{-1}^{1} \frac{|yx^3|}{e^{y^2}}\,dx\,dy = 4\int_0^R\int_0^1 \frac{|yx^3|}{e^{y^2}}\,dx\,dy$$
$$= \ldots = -\frac{1}{2}(e^{1/R^2}-1) \le \frac{1}{2}$$

Ist (J_m) eine monoton wachsende Folge von Jordanbereichen $J_m \subset [-1,1]\times\mathbb{R}$ mit $J_m \to [-1,1]\times\mathbb{R}$ (z.B. $J_m = [-1,1]\times[-m,m]$), so ist $\int_{J_m} |f(x,y)|\,d(x,y)$ monoton wachsend und außerdem durch $1/2$ nach oben beschränkt. Daher existiert $\int_{[-1,1]\times\mathbb{R}} |f(x,y)|\,d(x,y)$ und auch $\int_{[-1,1]\times\mathbb{R}} f(x,y)\,d(x,y)$. Ferner ist

$$\int_{[-1,1]\times\mathbb{R}} f(x,y)\,d(x,y) = \lim_{R\to\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-R}^{R} f(x,y)\,dy\,dx = \ldots = 0.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen $|K| := \displaystyle\int_K 1\,dx$ des Kegels

$$K = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2,\ 0\le x_3\le b\}.$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Es ist

$$|K| = \int_0^b \int_{-x_3}^{x_3}\int_{-\sqrt{x_3^2-x_2^2}}^{\sqrt{x_3^2-x_2^2}} dx_1\,dx_2\,dx_3 = \ldots = \frac{\pi}{3}b^3.$$

Aufgabe 4 (4+4+4 Punkte)

Sei dazu $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das Integral $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ für $x\in\mathbb{R}$.

(b) Welche Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitseigenschaften haben f und F ?

(c) Berechnen und vergleichen Sie die beiden Integrale

$$F'(0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)(0) \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\,dy.$$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Sei zunächst $x \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} dy = -\frac{x^2}{2} \int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} dy \\ &= -\frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^1 = -\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist $f(x,y) = f(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, also $F(0) = 0$. Somit ist

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(b) Offensichtlich ist F differenzierbar außerhalb 0 als Quotient von Polynomen, da das Polynom im Nenner keine Nullstellen hat. F ist nicht stetig.

f ist total differenzierbar außerhalb des Urpsrungs. Im Ursprung ist f nicht stetig, denn für die Folge $(1/n, 1/n)$ geht $f(1/n, 1/n)$ gegen $+\infty$. Insbesondere ist f für gar kein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = c$ stetig.

(c) Es gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - 2x^2y(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 4x^3y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{2x^3y + 2xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2xy^3 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^3}$$

und für $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0.$$

Also ist:

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) dy = 0,$$

wohingegen $F'(0)$ nicht existiert, da F nicht stetig in 0 ist.

Daher ist die Vertauschung von Integration und Differentiation in diesem Beispiel nicht möglich.