BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

30.06.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 10

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Lagrange-Multiplikatoren)

Bestimmen Sie den Abstand der Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$ zum Ursprung.

Aufgabe 2 (Lagrange-Multiplikatoren) Berechnen Sie von der Matrix $A := (1, 0)$ die Operatornorm $\|A\|$.

Aufgabe 3 (Riemannsche Summen) Berechnen Sie von der Funktion $f(x, y) := xy$ das Riemann-Integral über den Quader $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ mittels Riemannscher Summen.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 14.07., 10 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Seien $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \geq uv \quad \text{für alle } u, v > 0,$$

indem Sie das Minimum von $f(x, y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, $x, y > 0$, unter der Nebenbedingung $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ bestimmen.

Aufgabe 2 (6+6+8 Punkte)

In der Vorlesung und im Tutorium tauchte mehrfach die Operatornorm des Differentials $Df(x)$ auf, wobei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ war. Im Folgenden wollen wir uns die Operatornorm näher betrachten. Siehe Tutorium 7 für die Definition der Operatornorm $\|A\|_{\text{op}} = \|A\|$ einer $(m \times n)$-Matrix.

(a) Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Operatornorm von A mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren.

(b) Sei A eine beliebige $(m \times n)$-Matrix. Wie sieht es mit der Stetigkeit der Funktion $f(x) = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$ aus? Ist sie stetig, gleichmäßig stetig oder Lipschitz-stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Wie kann man die Operatornorm von A mit Hilfe der Eigenwerte von A berechnen?

Aufgabe 3 (6+6 Punkte)

(a) Aus Analysis 1 wissen wir, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist. Verallgemeinern Sie diesen Satz für stetige Funktionen auf kompakten Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ und beweisen Sie ihn mit Hilfe der Mittel aus der Vorlesung.

(b) Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf $Q = [0, 1]^2$ gegeben. Berechnen Sie $\displaystyle\int_Q f$ mit Hilfe von Riemannschen Summen.