BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

30.06.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 10

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Parametrisierte Flächenstücke)

Sei $\varphi\colon (0,5)\times(0,0.5)\to\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(u,t) := (t\cos u, t\sin u, u)$. Ist durch φ ein glattes parametrisiertes Flächenstück gegeben?

Aufgabe 2 (Untermannigfaltigkeit, lokale Parametrisierung)

Zeigen Sie, dass

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2-z^2=1, x-y=0\}$$

eine Untermannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie lokal nahe jedes Punktes eine Parametrisierung.

Aufgabe 3 (Lagrange-Multiplikatoren) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y,z) := 3x+2y+z$ unter den Nebenbedingungen $x-y+z=1$ und $x^2+y^2=1$.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 07.07., 10 Uhr

Aufgabe 1 (2+6+4 Punkte)

(a) Geben Sie ein Gebiet G im $\mathbb{R}^2$ an, das kein Parametergebiet ist.

(b) Ist $\varphi : (0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u,v) = \big((b-a\cos(v))\cos(u), (b-a\cos(v))\sin(u), a\sin(v)\big)$$

ein glattes parametrisiertes Flächenstück?

(c) Geben Sie eine Kurve $\gamma : (a,b)\to\mathbb{R}^2$ an, die injektiv ist, deren Ableitung $\gamma' = \begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \gamma_2'\end{pmatrix}$ nirgends verschwindet, die aber das dritte Axiom für glatte parametrisierte Flächenstücke nicht erfüllt. Erklären Sie Ihre Idee zunächst anhand einer Skizze.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Mengen Untermannigfaltigkeiten sind und geben Sie jeweils für jeden Punkt der Untermannigfaltigkeit eine lokale Parametrisierung an.

$$\text{(i)}\quad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-1=0\}$$

$$\text{(ii)}\quad B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x^2+y^2-1)^2+z^2=0\}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^3$ sei der Schnitt der beiden Flächen

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \qquad \text{und} \qquad A_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

Berechnen Sie den Abstand von C zum Ursprung mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren.

Aufgabe 4 (3+3+7+3+4 Punkte)

Sie können noch die Aufgaben 1b) 1c) sowie die Aufgabe 2) und 3a) von Blatt 9 abgeben, falls nicht bereits geschehen. Sie werden dann zu Blatt 9 angerechnet. Das Blatt 10 zählt insgesamt 30 Punkte.