BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

23.06.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 9

Tutoriumsaufgaben

Hinweis: Aufgaben 1-3 wurden am 21.06. und Aufgaben 4-6 am 28.06. behandelt.

Aufgabe 1 (Satz über implizite Funktionen)

(a) Bestimmen Sie für festes $r \in \mathbb{R}$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = r$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Diskutieren Sie, ob man $ye^x - xe^y = 0$ nach x oder y auflösen kann.

(c) Wie lautet der Satz über implizite Funktionen und was ist seine geometrische Interpretation? Wie sieht er für die Spezialfälle $k = n$ und $m = 1$ aus? Wie für $k = 1$ und $m = n$? (Siehe Notation in der Vorlesung.)

Aufgabe 2 (Satz über implizite Funktionen)

(a) Lösen Sie die Gleichung $y + 1 - xy - \cos(y) = 0$ nahe des Punktes $(0, 0)$ nach $y = g(x)$ auf und berechnen Sie $g'(0)$. Kann man auch nach x auflösen?

(b) Untersuchen Sie die Auflösbarkeit des Gleichungssystems

$$f_1(x_1, x_2, x_3) := x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 7 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + 2 = 0$$

nach x_2, x_3 nahe $(2, -1, 0)$. Berechnen Sie gegebenenfalls das Differential der auflösenden Abbildung in $x_1 = 2$. Was sind x und y in der Notation aus der Vorlesung? Kann man auch nach anderen Variablen auflösen?

Aufgabe 3 (Umkehrsatz und Polarkoordinaten) Sei $f\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$f(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Zeigen Sie, dass f lokal invertierbar mit differenzierbarer Inverse ist. Ist sie injektiv? Auf welchem Definitionsbereich ist sie injektiv? Was ist das Bild von f?

Aufgabe 4 (Satz über implizite Funktionen)

Sei eine $m \times (n + m)$ Matrix A gegeben. Untersuchen Sie das Gleichungssystem $Ax = 0$ auf Auflösbarkeit. Wie verhält sich dieses Resultat zusammen mit dem Satz über implizite Funktionen?

Aufgabe 5 (Satz über implizite Funktionen) Nahe welcher Punkte und nach welchen Variablen kann das Gleichungssystem $x^2 - y^2 = 0$, $y^2 - z^2 = 0$ aufgelöst werden?

Aufgabe 6 (Mengen und Satz über implizite Funktionen) Sei eine Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (1 + t^2, t^3)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^3 - y^2 = 0\} = |\gamma|$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve γ nahe $(2,1)$ nach $y = g(x)$ aufgelöst werden kann.

(c) Kann γ nahe des Punktes $(1,0)$ nach x oder y aufgelöst werden?

Aufgabe 4 (Schrankensatz) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\|Df(x) - E_n\| < 1$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass f bereits injektiv ist.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 30.06., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Satz über implizite Funktionen, 4+3+3 Punkte)

Sei die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := (t^2 - 1, t - t^3)$.

(a) Zeigen Sie: die Spur der Kurve ist genau die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - x^3 = 0\}$.

(b) Untersuchen Sie, an welchen Stellen es eine Funktion g gibt, so dass die Kurve lokal in der Form $y = g(x)$ geschrieben werden kann.

(c) Untersuchen Sie, an welchen Stellen es eine Funktion g gibt, so dass die Kurve lokal in der Form $x = h(y)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 2 (Satz über implizite Funktionen, 7+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 + \cos(x_3 x_4) &= x_4 x_1 + 1 \\ \sin(x_3) &= x_2 + x_4 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,-1,0,1)$ nach $y = (y_1, y_2) = (x_3, x_4)$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(0,-1), \quad i,j = 1,2.$$

(b) Nach welchen Variablen kann man noch auflösen, indem man den Satz über implizite Funktionen benutzt?

Aufgabe 3 (Lokale Umkehrbarkeit, 4+6 Punkte)

Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Stellen Sie fest, an welchen Punkten diese Funktion eine lokale Inverse besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ genau zwei Urbildpunkte hat.

Bemerkung: Teil (b) besagt, dass f nicht global umkehrbar ist. Der Umkehrsatz liefert also zunächst nur Umkehrbarkeit in der Nähe eines Punktes. Wie müssen also die Bedingungen an f und seinen Definitionsbereich geändert werden, damit man auch globale Umkehrbarkeit erhält? Dieser Frage gehen wir in Aufgabe 4 nach.

Aufgabe 4 (Globale Umkehrbarkeit, 7+3 Punkte)

Hinweis: Die Punkte dieser Aufgabe zählen voll und sind keine Bonuspunkte. Es wird zukünftig keine Bonuspunkte mehr geben.

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, d.h. für je zwei Punkte a, b aus G liegt auch die Spur der Verbindungsstrecke $|\gamma_{ab}|$ definiert durch $\gamma_{ab}(t) := a(1-t) + bt$, $t \in [0,1]$, wieder ganz in G. Sei ferner $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und es gelte

$$\det \begin{pmatrix} D_1 f_1(\xi_1) & \dots & D_n f_1(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_n(\xi_n) & \dots & D_n f_n(\xi_n) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall\, \xi_1, \dots, \xi_n \in G.$$

Zeigen Sie, dass dann f injektiv ist.

(b) Warum ist f aus Aufgabe 3 auf dem ersten Quadranten $Q = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$ injektiv ist? Zeigen Sie ferner, dass Q konvex ist.