BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

16.06.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 8

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Taylorpolynom) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung der Funktion

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 \cos(x_2)$$

im Punkt $x_0 := (1, \pi)$.

Aufgabe 2 (Definitheit) Sei eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) A ist genau dann positiv definit, wenn $a_{11} > 0$ und $\det A > 0$ gelten.

(b) A ist genau dann negativ definit, wenn $a_{11} < 0$ und $\det A > 0$ gelten.

(c) A ist genau dann indefinit, wenn $\det A < 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Lokale Extremstellen) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := xy^2 - y^2 + x^3 + x^2$.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 23.06., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Multi-Indizes, 2+6)

Gegeben seien zwei Multi-Indizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ in $\mathbb{N}_0^n$. Wir definieren die Ungleichung $\beta \le \alpha$ durch

$$\beta \le \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \beta_i \le \alpha_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

(a) Sei $n = 3$. Schreiben Sie $P(x) = \sum_{|\alpha| \le 4} c_\alpha x^\alpha$ ohne Summenzeichnen. Benutzen Sie zwecks Übersicht die Variablen $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha$ und jeden Multi-Index β gilt:

$$D^\beta P(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ \beta \le \alpha}} c_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}$$

Aufgabe 2 (Lokale Extremstellen auf offenen Mengen, 10 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 9y^2 + 24z^2 - x^3 - 2y^3 - 4z^3.$$

Aufgabe 3 (Lokale Extremstellen auf kompakten Mengen, 4+4+4 Punkte)

Seien $K := [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = 12x^2y - 12xy + 4y^3.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $f : \partial K \to \mathbb{R}$, indem Sie den Rand von K mit Hilfe von Verbindungsstrecken parametrisieren. Vergleichen Sie sie mit Teil (a).

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $f : K \to \mathbb{R}$, indem Sie u.a. Teil (a) und (b) benutzen.

Aufgabe 4 (Lokale Extremstellen, 4+2+4 Punkte)

Hinweis: Die Punkte dieser Aufgabe zählen voll und sind keine Bonuspunkte. Es wird zukünftig keine Bonuspunkte mehr geben.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Enschränkung von f auf jede Gerade durch den Ursprung im Nullpunkt ein lokales Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie $Df(0,0)$ und Hess$f(0,0)$.

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung allerdings **kein** lokales Minimum hat, indem Sie das lokale Verhalten von f nahe $(0,0)$ untersuchen.