BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

02.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 7

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Richtungsableitung)

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y) := x^3\sin(y)$ an der Stelle $(4,\pi)$ in Richtung $(1,2)$.

(b) Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Existiert die Richtungsableitung von g im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(3,1)$?

Aufgabe 2 (Mittelwertsatz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig (siehe Übungsaufgabe 3b). Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Seien $f,g\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $Df(x) = Dg(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}^m$, so dass $f = g + C$ auf U gilt.

(b) Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar mit $Df(x) = A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für alle $x \in U$. Dann ist f bereits affin-linear.

Aufgabe 3 (Operatornorm) Sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ mit $\|A\| := \sup\{|Ax|\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$ die Operatornorm. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gelten folgende Aussagen:

(a) $\|A\| = \sup\{|Ax|\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\} = \sup\left\{\frac{|Ax|}{|x|}\colon x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0\right\}$.

(b) $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 16.06., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Richtungsableitungen, 4+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie im Folgenden jeweils $D_v f(0,0)$ und $Df(0,0)\cdot v$. Unter welchen Bedinungen an f sind beide gleich?

(a) $f(x,y) = \arctan(x - y^2)$, $v = (3,4)$

(b) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2y}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{array} \right\}$, $v = (2,1)$

Aufgabe 2 (Richtungsableitung & Stetigkeit, 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \cdot y \neq 0 \\ 0, & x \cdot y = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von f im Ursprung existieren, f dort aber nicht stetig ist.

Aufgabe 3 (Mittelwertsatz, 4+6+4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist $n > m$, so gibt es zu jedem $x_0 \in U$ einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, so dass $Df(x_0)v = 0$ ist.

(b) Sei U sternförmig, d.h. U enthält einen Punkt a, so dass für jedes $b \in U$ die Verbindungsstrecke $|\gamma_{ab}| = \{\gamma_{ab}(t) := a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ ganz in U enthalten ist.
Beweisen Sie: Ist $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$, so ist f eine konstante Abbildung.

(c) Seien $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := xyz$, $a = (1,1,0)$ und $b = (0,1,1)$. Bestimmen Sie einen Punkt $\xi \in |\gamma_{ab}|$ mit $g(b) - g(a) = Dg(\xi)(b-a)$.

Aufgabe 4 (Taylor-Polynom, 5+5 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \frac{e^x}{1-y}\cos(z)$. Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom $T_{f,0,3}$ von f im Ursprung.

(b) Bestimmen Sie das dritte Taylor-Polynom $T_{g,(1,0),3}$ von $g(x_1,x_2) = e^{x_1x_2}$ in $(1,0)$.

Aufgabe 5* (Totale Differenzierbarkeit, keine Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann total differenzierbar überall auf $\mathbb{R}^n$ ist, wenn f linear ist.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die partiellen Ableitungen $D_if_j(0)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, und betrachten Sie für festes $x = \sum_{k=1}^n x_ke_k$ den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tx) - f(0) - Df(0)\cdot tx}{|tx|}$$

Lösung: Wir zeigen, dass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt. Das ist äquivalent zu

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_ie_i) = \sum_{i=1}^n f(x_ie_i) = \sum_{i=1}^n x_if(e_i).$$

Klar ist, dass $f(0) = 0$ sein muss. Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Komponenten f_j. Sei hierfür e_i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt:

$$D_if_j(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_j(he_i) - f_j(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf_j(e_i)}{h} = f_j(e_i).$$

Ist nun f total differenzierbar, so ist für $x \neq 0$ und $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx) - f(0) - Df(0)\cdot tx}{|tx|}$$

Für die j-te Komponente gilt dann:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(tx) - f(0) - Df_j(0)\cdot tx}{|tx|} = \lim_{t\to 0} \frac{t\big(f_j(x) - (f_j(e_1),\ldots,f_j(e_n))\cdot x\big)}{|t|\cdot|x|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \frac{f_j(x) - \sum_{i=1}^n f_j(e_i)x_i}{|x|} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \frac{f_j(x) - \sum_{i=1}^n f_j(x_i e_i)}{|x|}$$

Da $\lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \neq 0$, muss gelten:

$$f_j(x) - \sum_{i=1}^n f_j(x_i e_i) = 0 \qquad (*)$$

Daraus folgt die Linearität.

Sei andererseits f linear. Wählen wir $A_{ij} := f_j(e_i)$ und die letzte Gleichheit $(*)$. Dann können wir mit ähnlichen Rechnungen wie oben auf die totale Differenzierbarkeit im Ursprung schließen. Sei $\tau(x) = x - p$ für ein festes $p \in \mathbb{R}^n$.

Nach der Kettenregel ist dann $f\circ\tau$ in p differenzierbar, da f in 0 differenzierbar, t überall differenzierbar und $\tau(p) = 0$ sind. Andererseits ist

$$(f\circ\tau)(x) = f(x-p) = f(x) - f(p)$$

in p differenzierbar, also erst recht f.