BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

26.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 6

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Totale Differenzierbarkeit)

Sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 13x + y & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 2 (Totale Differenzierbarkeit)

Untersuchen Sie die euklidische Norm $|\cdot|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3 (Partielle Differenzierbarkeit, gleichmäßige Konvergenz)

Seien reelle Zahlen $a < b$, $c < d$ und $\tau > 0$ gegeben. Sei zudem eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \times [c-\tau, d+\tau] \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f|_{[a,b]\times(c-\tau,d+\tau)}$ stetig partiell differenzierbar in die zweite Koordinatenrichtung ist. Beweisen Sie, dass die Funktion $F\colon (c,d) \to \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)dx$$

stetig differenzierbar ist.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 02.06., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Partielle & totale Differenzierbarkeit, 2+2+4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Ursprung stetig und partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (Produkt- und Kettenregel, (3+3)+(2+2) Punkte)

Die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = xy.$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f, g und zeigen Sie, dass f und g total differenzierbar (überall auf $\mathbb{R}^2$) sind.

(b) Berechnen Sie jeweils die Jacobi-Matrix des Produkts $g \cdot f$ und der Komposition $g \circ f$.

Aufgabe 3 (Totale Differenzierbarkeit, 12 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wie hängen die nachfolgenden Aussagen zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie jeweils die Definition der unten genannten Begriffe an.

(i) f ist in x_0 stetig partiell differenzierbar.

(ii) f ist in x_0 total differenzierbar.

(iii) f ist stetig in x_0 und partiell differenzierbar in x_0.

(iv) f ist partiell differenzierbar in x_0

(v) f ist stetig in x_0.

(vi) Es gibt genau eine reelle $(m \times n)$-Matrix A, so dass $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$

Aufgabe 4 (Partielle Differenzierbarkeit, 10 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die partiell differenzierbar auf U ist und deren partielle Ableitungen beschränkt sind. Beweisen Sie, dass f stetig in x_0 ist.

Hinweis: Die Punkte dieser Aufgabe zählen voll und sind keine Bonuspunkte. Es wird zukünftig keine Bonuspunkte mehr geben.

Versuchen Sie, die Aufgabe selbst zu lösen, statt die Lösung abzuschreiben. Gehen Sie ähnlich vor wie in der ersten Hälfte des Beweises von Satz 31, um den Mittelwertsatz in einer Variable zu nutzen. Betrachten Sie ähnlich wie dort die Differenz $|f(x) - f(x_0)|$ und folgern Sie die Stetigkeit mit dem ε-δ-Kriterium.