BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

19.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 5

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Kompaktheit) Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in K liegt.

Beweisen Sie, dass eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.

Aufgabe 2 (Kompaktheit) Untersuchen Sie folgende Mengen auf Kompaktheit:

(a) $\overline{B^m}(0,1) \times \overline{B^n}(0,1) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

(b) $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\}$

Aufgabe 3 (Partielle Ableitungen) Berechnen Sie, falls möglich, alle partiellen Ableitungen erster Ordnung:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := zx^2 \cos(y)$.

(c) $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $h(a,b,c,d) := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Übungssaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 26.05., 10 Uhr.

Aufgabe 1 (Stetigkeit, 8 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Untersuchen Sie, in welcher Relation die folgenden Aussagen zueinander stehen (Äquivalenz, Implikation, keine Relation). Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) f ist stetig.

(ii) f ist folgenstetig.

(iii) Der Graph $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 2 (Kompaktheit, 6+4 Punkte)

(a) In Hinblick auf den Satz von Heine-Borel überprüfen Sie die Mengen aus Aufgabe 3 des Blattes 4 auf Abgeschlossenheit und Beschränktheit. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Benutzen Sie die Ergebnisse aus der Vorlesung und der Übungszettel, um zu zeigen, dass die „Einheitskugel“ $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ kompakt ist.

Aufgabe 3 (Partielle Ableitungen, 4+6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \left(e^{x_1+2x_2},\ \sin(x_2 + 2x_1)\right) \qquad g(y_1, y_2, y_3) := \left(y_1 + 2y_2^2 + 3y_3^2,\ 2y_2 - y_1^2\right)$$

Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von f und g.

Aufgabe 4 (Stetigkeit und Kompaktheit, 4+3+5 Punkte)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Der Abstand von einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zu A ist definiert durch $d(x, A) := \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Zeigen Sie, dass $d(\cdot, A)$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist A abgeschlossen, so gibt zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein $a_0 \in A$ mit

$$d(x, A) = |x - a_0|.$$

(c) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Mengen. Ist eine der beiden Mengen kompakt, so gilt für ihren Abstand:

$$d(A, B) := \inf\{|a - b| : a \in A,\ b \in B\} > 0.$$

Bleibt $d(A, B) > 0$, wenn man die Bedingung an eine der beiden Mengen, kompakt zu sein, weglässt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir müssen zuerst prüfen, ob $d(x, A)$ überhaupt wohldefiniert ist, sprich eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ mit Bild in $\mathbb{R}$ (es könnte z.B. $d(x, A) = \infty$ sein.) Sei hierzu $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist offensichtlich

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, A \cap B(x, r)) \leq |x - a| \leq r < \infty$$

für alle $a \in A \cap B(x, r)$.
Wir kommen nun zur Stetigkeit. Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x - y| < \delta = \varepsilon/2$ gilt:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon,$$

Laut Defintion des Infimums gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon in A$ mit

$$|y - a_\varepsilon| < d(y, A) + \varepsilon/2.$$

Daraus folgt für $|x - y| < \delta$, dass

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - a_\varepsilon| - d(y, A) = |x - y + y - a_\varepsilon| - d(y, A)$$

$$\leq |x - y| + |y - a_\varepsilon| - d(y, A) < \delta + \varepsilon/2.$$

Wählen wir also $\delta = \varepsilon/2$, so ist

$$d(x, A) - d(y, A) < \varepsilon.$$

Analog $d(y, A) - d(x, A) < \varepsilon$, also $|d(x, A) - d(x, A)| < \varepsilon$. Hier ist also $d(x, A)$ sogar gleichmäßig stetig.

(b) Laut Defintion des Infimums gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit

$$d(x, A) \leq |x - a_n| < d(x, A) + 1/n.$$

Daraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} |x - a_n| = d(x, A)$ ist. Daher konvergiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Da A abgeschlossen ist, liegt ihr Grenzwert a_0 in A.

(c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit

$$d(A,B) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|a_n - b_n|}_{d_n}$$

Angenommen, $d(A,B) = 0$. Dann ist $(d_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge. Da K kompakt ist, hat $(b_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(b_{n_k})_{k\geq 1}$, die gegen $b_0 \in B$ konvergiert. Daraus und da $|a_{n_k} - b_{n_k}|$ eine Nullfolge ist, schließen wir, dass auch $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ auch konvergieren muss (gegen eine Zahl a_0). Da A abgeschlossen ist, liegt a_0 in A. Da A und B disjunkt sind, folgt schließlich:

$$d(A,B) = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{k\to\infty} d_{n_k} = |a_0 - b_0| > 0$$

Vorsicht: Man weiß immer noch nicht, dass $(d_n)_n$ konvergiert, sondern nur $(d_{n_k})_k$!!!
Für ein Gegenbeispiel nehmen wir A als den Graphen von $y = f(x) = 1/x$ für $x > 0$ und B die x-Achse im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $d(A,B) = 0$.