BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

12.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 4

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (glm. Konvergenz)

Definiere für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \frac{1}{nx}.$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig konvergent, aber nicht gleichmäßig konvergent auf $(0,1)$ ist.

Aufgabe 2 (glm. Konvergenz) Sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \Big(\exp(-n)\sin x, \frac{x}{n}\Big).$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf punktweise und (lokal) gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3 (Kompaktheit) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K_1 := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

nicht kompakt, aber die Menge $K_2 := K_1 \cup \{0\}$ kompakt ist.

Aufgabe 4 (Kompaktheit, glm. Konvergenz) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f_k\colon K \to \mathbb{R}^m$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen, so dass $(f_k)_k$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Beweisen Sie, dass dann bereits $(f_k)_k$ gleichmäßig gegen f auf K konvergiert.

Übungssaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 19.05., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Stetigkeit, 6+4 Punkte)

(a) Überprüfen Sie, wo die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann stetig ist, wenn jede Komponente $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, stetig ist. Wir wollen nun untersuchen, ob eine ähnliche Eigenschaft für den Definitionsbereich gilt und genügen uns mit dem Fall $m = 1$ und $n = 2$. Genauer halten wir x bzw. y aus $\mathbb{R}$ fest und setzen

$$f_x : t \to f(x,t) \quad \text{und} \quad f_y : t \to f(t,y).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so sind $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

Gilt auch die Umkehrung? Untersuchen Sie hierfür die Funktion aus Teil (a).

Hinweis: f_x und f_y sind die Einschränkungen von f auf $\{x\} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \times \{y\}$.

Aufgabe 2 (Gleichmäßige Konvergenz, 8+2 Punkte)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Bekanntlich ist die Supremumsnorm von g definiert durch $\|g\|_\infty := \sup\{|g(x)| : x \in D\}$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ von beschränkten Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$ folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $(f_k)_k$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf D.

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$

Wie hängen die Aussagen (a) und (b) mit der Bedingung an $(f_k)_k$ zusammen, lokal gleichmäßig konvergent gegen f auf D zu sein?

Aufgabe 3 (Kompaktheit, 3x4 Punkte)

Die nachfolgenden Mengen sind alle nicht kompakt. Finden Sie jeweils eine offene Überdeckung der Menge, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$

(b) $B = \overline{B(0,1)} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$

(c) $C = [0,1]^4 \setminus \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$

Aufgabe 4* (Funktionenreihen, 8 Bonuspunkte für die Klausurzulassung)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(g_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von beschränkten, stetigen Funktionen $g_k : D \to \mathbb{R}$. Angenommen, die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_\infty$ sei konvergent. Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ gleichmäßig auf D gegen eine stetige Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Beweisskizze Man zeige folgende Teilaussagen:

(a) Es gilt $|g_k(x)| \leq \|g\|_\infty$ für alle $x \in D$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ absolut. Insbesondere ist $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ wohldefiniert.

(b) $\|\sum\limits_{k=N}^{\infty} g_k\|_\infty \leq \sum\limits_{k=N}^{\infty} \|g_k\|_\infty$

(c) Es gilt $\lim\limits_{N\to\infty} \|\sum\limits_{k=1}^{N} g_k - g\|_\infty = 0$

(d) g ist stetig als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen.