BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

03.05.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 3

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1 (Konvergenz) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz:

(a) $x_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{n+3}{n-1}\right)$ für $n \geq 2$.

(b) $y_n := \left(\frac{\exp(n!)}{\log(\sqrt{n})}, (-1)^n \sqrt[n]{n}, \frac{\log n}{\log(\log n)}\right)$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 2 (Konvergenz) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 3 (Stetigkeit) Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beweisen Sie nachfolgende Aussagen:

(a) f ist unstetig in $(0,0)$.

(b) Die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Ursprung ist stetig.

Aufgabe 4 (Stetigkeit) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $\{f < 0\}$ offen ist.

Übungsaufgaben

Abgabe: bis Freitag, 12.05., 10 Uhr

Aufgabe 1 (Folgenkonvergenz, 5+5+6 Punkte)

(a) Konvergiert $x_n := \left(\dfrac{\log(n!)}{\sqrt[3]{n}}, \dfrac{\log(n^2)}{\log(2n)}\right)$, $n \in \mathbb{N}$?

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$z_{n+1} := (x_{n+1}, y_{n+1}) := \left(\frac{x_n - y_n}{2}, \frac{x_n + y_n}{2}\right) \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit Startwert $z_1 := (x_1, y_1) := (1,1)$ gegen $(0,0)$ konvergiert, indem Sie $|z_n|$ betrachten.

(c) **Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$:** Eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ im $\mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, falls es eine Konstante $C > 0$ mit $|x_k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt. Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ eine konvergente Teilfolge besitzt, indem Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$ aus Analysis 1 benutzen.

Aufgabe 2 (Stetigkeit, 4x4 Punkte)

(a) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{f \leq 0\} := \{x \in A : f(x) \leq 0\}$ und $\{f = 0\} := \{x \in A : f(x) = 0\}$ ebenfalls abgeschlossen sind. Stimmt es, dass $\partial\{f \leq 0\} = \{f = 0\}$ ist?

(b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, genau dann stetig auf U ist, wenn sie folgenstetig auf U ist, d.h. ist $a \in U$, so gilt für jede gegen a konvergente Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ in U:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig im Ursprung ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ stetig ist. (Benutzen Sie die Darstellung $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ meint, und vergleichen Sie die Norm mit der Euklidischen Norm.)

Aufgabe 3* (Normäquivalenz, 8 Bonuspunkte)

Die Punkte werden für die Klausurzulassung angerechnet.

Beweisen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Als Folgerung gilt für jede Folge $(a_k)_{k\geq 1}$ und jede Norm $\|\cdot\|$ im $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k - a\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Lösungen zu Aufgabe 3 (Skizze)

Zeige zunächst, dass es Zahlen $A > 0$ und $B > 0$ gibt, so dass

$$A\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq B\|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. jede Norm ist zur Maximumsnorm äquivalent. Dann zeigt man folgende Aussagen nacheinander.

(a) Ist $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, wobei $\{e_k\}_k$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, so ist

$$\|x\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\|\sum_{k=1}^n e_k\|}_{=:B}.$$

(b) Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig (siehe Aufgabe 2 oben). Oder mit dem Teil vorhin: Sei $(x_n)_n$ eine gegen x_0 konvergent Folge. Dann ist:

$$\|x_n - x_0\| \leq A\|x - x_0\|_\infty \overset{x\to x_0}{\to} 0.$$

(c) Da $\|\cdot\|$ stetig ist, ist $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ kompakt, d.h. die Norm nimmt auf K ein lokales Minimum in $x_0 \in K$ an. Es gibt also eine ein $\delta > 0$ derart, dass $\|x\| \geq \|x_0\|$ für alle $x \in B(0,\delta)$

(d) Ist nun $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann ist $y := \frac{\delta x}{2|x|} \in B(0,\delta)$ und daher $\|y\| \geq \|x_0\|$. Das liefert nach einsetzen $\|x\| \geq \dfrac{2|x|}{\delta}\|x_0\|$.

(e) Der Rest folgt, da die Euklidische Norm zur Maximumsnorm äquivalent ist.