BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

26.04.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 2

Tutoriumsaufgaben

Hinweis: Die Aufgaben werden im Tutorium am 26.04. (16-18 Uhr in HS10) behandelt und können teils als Vorlage für die Übungsaufgaben verwendet werden. In jeden Fall dienen sie der Klausurvorbereitung.

Aufgabe 1 (Normen)

Die *Maximumnorm* ist für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2 (Topologie) Berechnen Sie für die Menge $A := [0,1) \times [0,1]$ das Innere A°, den Abschluss $\overline{A}$ und den Rand ∂A.

Aufgabe 3 (Topologie) Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

- Zeigen Sie, dass $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ gilt.
- Gilt die Gleichheit auch für $A^\circ \cup B^\circ$ und $(A \cup B)^\circ$?

Übungsaufgaben

Abgabe: 04.05.17 bis spätestens 8 Uhr.

Aufgabe 1 (Mengenoperationen und Topologie, 4+6 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \Big([0,1) \times [0,2]\Big) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{-n}\} \times [0,1]\right) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Geben Sie an, was der Kern, der Abschluss und der Rand von M sind (ohne Beweis).

(b) Seien A und B zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. In welcher Beziehung stehen $\overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B}$?

Hinweis: Benutzen Sie u.a. Blatt 1, Aufgabe 3b und Teilmengenbeziehungen.

Aufgabe 2 (Äquivalenz von Normen, 2+4+3+4 Punkte)

Wir betrachten nun weitere Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ und vergleichen sie mit bereits definierten Normen. Sei für $p \geq 1$ die *p-Norm* auf $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

(a) Wir können auch $p = \infty$ setzen, indem wir zeigen, dass gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,$$

wobei $\|x\|_\infty := \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie ferner, dass die p-Normen für $p \geq 1$ oder $p = \infty$ zur Euklidischen Norm äquivalent sind, d.h. dass es zwei Konstanten $A, B > 0$ gibt, die nur von p und n abhängen, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A\|x\|_p \leq |x| \leq B\|x\|_p$$

(c) Sei der *Ball um $a \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ bzgl. der p-Norm* definiert durch

$$B(p, a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_p < r\}.$$

Skizzieren Sie $B(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 1)$ und $B(\infty, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^2$?

(d) Folgern Sie mit Hilfe von Teil (b), dass eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann offen ist, wenn für jedes $a \in U$ ein $r > 0$ mit $B(p, a, r) \subset U$ existiert.

D.h. die Euklidische Norm und die p-Normen erzeugen dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (Supremumsnorm, 4+3+2 Punkte)

Sei die Supremumsnorm einer beschränkten Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ für $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|f\|_I := \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass Supremumsnorm $\|\cdot\|_I$ auf dem Vektorraum V der auf I beschränkten Funktionen eine Norm ist (siehe Blatt 1, Aufgabe 2e).

(b) Berechnen Sie $\|f\|_{[0,\infty)}$ für $f(x) = xe^{-x}$.

(c) Sei f eine auf I differenzierbare Funktion, deren Ableitung auf I beschränkt ist. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_I \cdot |x - y|$$

D.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \|f'\|_I$.

Aufgabe 4* (p-Normen)

Diese anspruchsvolle Aufgabe ist für Interessierte. Sie fließt nicht in die Bepunktung ein. Sie können Ihre Lösung trotzdem zur Überprüfung abgeben (auch nach Ablauf der Abgabefrist). Eine Musterlösung wird bei Interesse bereitgestellt.

Beweisen Sie, dass die p-Normen tatsächlich Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind.

Lösungen zu Aufgabe 4

(Vielmehr eine Lösungsskizze. Die Teilschitte kann man im Internet oder anderen Skripten finden.)

1. Man zeige zunächst eine Version der Youngschen Ungleichung: Für $a, b \geq 0$ und $r \in (0, 1)$ gilt

$$a^r b^{1-r} \leq ra + (1 - r)b.$$

2. Und damit die Hölder-Ungleichung: Für $p \geq 1$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p^{1/p} \cdot \|x\|_q^{1/q}$$

Für $q = p = 2$ ist das gerade die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Für den Beweis setze man $r = 1/p$, $1 - r = 1/q$, $a_i = (|x_i|/\|x\|_p)^p$ und $b_i = (|y_i|/\|y\|_q)^q$ und schätze $\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} = a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}}$ u.a. mi Hilfe der Youngschen Ungleichung geeignet nach oben ab.

3. Schließlich wendet man die Hölder-Ungleichung auf die folgenden Summen an:

$$\|x + y\|_p^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i - y_i|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i - y_i|^{p-1}$$

und nutzt die Beziehung $1/p + 1/q = 1$.