BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

19.04.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 2, SoSe 2017

Blatt 1

Abgabe:

Do, 27.04.17, bis spätestens 8 Uhr in die Postfächer der jeweiligen Übungsleiter (siehe Homepage).

Lernstrategien:

- Besuchen Sie unbedingt das **Tutorium**, da dort Beispiele und Rechnungen vorgestellt und Vorlesungsinhalte diskutiert werden, die Ihnen beim Lösen der Aufgaben helfen können.
- Erstellen Sie einen Account auf **www.studiport.de**. Die dortigen Online-Kurse bilden die Grundlagen der Mathematik, die Sie für das gesamte Studium unbedingt benötigen. Das Fehlen dieser Grundlagen war u.a. ein großes Hindernis zum Lösen der Klausuraufgaben.
- Da zunehmend neben den Rechentechniken auch Verständnisfragen sowohl in den Übungen als auch der Klausur gestellt werden, hat das **Durcharbeiten der Vorlesung** oberste Priorität.
- Wenn **Definitionen** genannt werden, lernen Sie sie auswendig und suchen Sie Beispiele und Gegenbeispiele. Wenn **Formeln** vorgestellt werden, wenden Sie sie ggf. auf einfache **Beispiele** an. Wenn wichtige **Sätze** genannt werden, **lernen** Sie sie ebenfalls auswendig.
- Stellen Sie sich **Leitfragen**, wozu der Satz gebraucht wird, was er bedeutet und wie er im Kontext zum Gesamtinhalt steht. Was ist, wenn man die Voraussetzungen abschwächt? Wie ist der **rote Faden** des Kapitels?

Aufgabe 1 (Wiederholung $\exp$ und $\log$, 5x2 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen, indem Sie im Analysis 1-Skript oder anderen Quellen (mit Quellenangabe!) recherchieren. Begründen Sie ggf. Ihre Antworten.

(a) Wo ist der Unterschied zwischen $\exp(x)$ und e^x, und wie hängen beide zusammen?

(b) Wie sind $\log$ und $\log_a$ für $a > 0$? (Aus der Schule sind Ihnen sicherlich $\ln$ und $\lg$ bekannt. Erklären Sie beide Symbole.)

(c) Vereinfachen Sie

$$\frac{\log \sqrt[5]{8} - \log \sqrt[35]{128}}{\log 6}$$

mit Hilfe der Logarithmengesetze und bringen Sie auf die Form $c \log_a b$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b, c > 0$.

(d) Was sind $\log(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \log(x)$, $\log(1)$, $\log(e)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \log(x)$ und wieso?

(e) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\exp(-x)$ und $\log |x|$. Wie lautet jeweils der größtmöglichen Definitionsbereichs und der Wertebereich?

Aufgabe 2 (Skalarprodukt → Norm → Metrik, 6+2+2+2+2 Punkte)

(a) Sei $V = \mathcal{C}([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert. Überprüfen Sie hierführ die Eigenschaften in Kap. 1, §1, Satz 1 auf V statt $\mathbb{R}^n$.

(b) Erzeugen Sie mit Hilfe von Teil (a) eine Norm $\|\cdot\|$ und eine Metrik d auf $V = \mathcal{C}([a,b])$.

(c) Seien $V = \mathcal{C}([0,1])$ und $f_n(x) := x^n$ für $m \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie mit der Metrik aus (b) den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, 0).$$

(d) Bleiben die Eigenschaften des Skalarprodukts in Teil (a) erhalten, wenn man die Stetigkeit durch Riemann-Integrierbarkeit ersetzt?

(e) Seien nun für $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ die Supremumsnorm

$$\|f\|_{[0,1]} := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

und die von ihr induzierte Metrik $d^*(f,g) := \|f-g\|_{[0,1]}$ gegeben. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} d^*(f_n, 0)$$

mit f_n aus Teil (c) und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil (c).

Aufgabe 3 (Topologie: Hülle, Kern und Rand, 5+3+2 Punkte)

(a) Seien $B(a,r) := B^n(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$ und

$$A := B(0,1) \cup \big(B(0,2) \cap \mathbb{Q}^n\big).$$

Berechnen Sie den Abschluss, den Kern und den Rand von A.

(b) Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $A^\circ \subset B^\circ$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$. Gilt auch $\partial A \subset \partial B$?

(c) Wie hängen $(\overline{A})^\circ$ und $\overline{A^\circ}$ zusammen?

Aufgabe 4* (Riemann Integrierbarkeit, ohne Punkte)

Diese anspruchsvolle Aufgabe ist für Interessierte. Die folgende Aufgabe fließt weder in die Bepunktung ein noch wird sie in der Übung vorgestellt. Die Lösung wird allerdings hochgeladen. Sie können Ihre Lösung trotzdem zur Überprüfung abgeben.

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{m}, & \text{für} \quad x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}\,(n,m) = 1 \\ 1, & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. (Siehe auch Blatt 9, Analysis 1).

Lösungen zu Aufgabe 4

Wir erinnern uns: f ist Riemann-integrierbar, wenn das Oberintegral gleich dem Unterintegral ist. Dabei sind

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \tau[a,b],\ \varphi \geq f\}$$

und

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \sup\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \tau[a,b],\ \varphi \le f\},$$

wobei $\tau[a,b]$ die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist.

Wir vermuten, dass das Oberintegral und das Unterintegral beide verschwinden und f somit integrierbar ist mit verschwindendem Integral (über $[0,1]$).

Da $f \ge 0$ ist, gilt offensichtlich $\int_{*a}^{b} f(x)\,dx \ge 0$. Stets gilt außerdem

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx \le \int_a^{*b} f(x)\,dx.$$

Daher müssen wir nur noch $\int_a^{*b} f(x)\,dx \le 0$ zeigen. Genauer zeigen wir, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ gibt, so dass $\varphi \ge f$ und $\int_0^1 \varphi(x)\ dx \le \varepsilon$. Nach der Definition des Oberintegrals gilt dann $\int_a^{*b} f(x)\,dx \le \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt dann $\int_a^{*b} f(x)\,dx = 0$.

Wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $1/M < \varepsilon$. Dann ist die Menge

$$\{x \in [0,1] : f(x) > 1/M\} = \{\frac{n}{m} \in [0,1] : 0 < m \le M,\ 0 \le n \le m\} =: A$$

endlich und besteht aus den Elementen $0 = x_0 < \ldots x_l = 1$. Wir konstruieren nun die Treppenfunktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 1/M, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \ge f$ und es gilt $\int_0^1 \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{M} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{M}(1-0) = \frac{1}{M} < \varepsilon$.