BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften
Hauptseminar Komplexe Analysis und Geometrie SoSe 2015
–
Liste der möglichen Seminarthemen

1. Bergman-Projektion, Bergman-Formel für den Ball (2 Doppelstunden)

Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnet

$$A^2(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f(z)|^2 dV(z)^{1/2} \right\}$$

den Raum der quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf Ω, den sogenannten *Bergman-Raum* (hierbei bezeichnet dV das Lebesgue-Maß auf Ω). Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega f(z)\bar{g}(z)dV(z)$$

ist $A^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes $L^2(\Omega)$ der auf Ω quadratintegrierbaren Funktionen. Aus allgemeiner Hilbert-Raum Theorie folgt leicht, dass die orthogonale Projektion $P\colon L^2(\Omega) \to A^2(\Omega)$ in der Form

$$Pf(z) = \int_\Omega K(\,\cdot\,,\zeta)f(\zeta)dV(\zeta)$$

mit $K(\,\cdot\,,\zeta) \in A^2(\Omega)$ dargestellt werden kann. Die Abbildung $P = P_\Omega\colon L^2(\Omega) \to A^2(\Omega)$ heißt *Bergman-Projektion*, die Funktion $K = K_\Omega\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Bergman-Kern*.

Im Allgemeinen ist es schwierig zu vorgegebenem $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ explizite Darstellungen von K_Ω herzuleiten. Für den Spezialfall des Einheitsballes $B \subset \mathbb{C}^n$ ist es jedoch möglich K_B explizit zu bestimmen:

Satz. *Für $z, \zeta \in B$ gilt*

$$K_B(z, \zeta) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1 - z \cdot \zeta)^{n+1}},$$

wobei $z \cdot \zeta = z_1\bar{\zeta}_1 + z_2\bar{\zeta}_2 + \cdots + z_n\bar{\zeta}_n$.

Literatur

[1] S.G. Krantz *Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric*, Graduate Texts in Math. **268**, Springer, New York, 2013, p. 1-19.

[2] R.M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Texts in Math. **108**, Springer, New York, 1986, p. 179-183.

2. Die Bochner-Martinelli-Koppelman Formel (1-3 Doppelstunden)

Teil 1: Bochner-Martinelli Formel

Für Polyzylinder $\Delta := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < r_j\}$ beschreibt die Cauchy Integralformel wie sich Werte von Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Delta) \cap C^0(\bar{\Delta})$ aus den Randdaten von f rekonstruieren lassen, genauer

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}$$

mit $T := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = r_j\}$. Diese Integraldarstellung hat viele wichtige Anwendungen, aber sie ist nur auf eine sehr kleine Klasse von Gebieten anwendbar (man überlegt sich leicht eine Verallgemeinerung auf Produkte von Gebieten in $\mathbb{C}$) und sie ist sehr speziell (die Integration erfolgt nicht über den ganzen Rand, sondern nur über den ausgezeichneten Rand $T \subset b\Delta$). Es ist aber möglich Integralformeln auch in allgemeineren Situationen zu beweisen.

Satz (Bochner-Martinelli Formel). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise C^1-glattem Rand und sei $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt für jedes $z \in \Omega$*

$$f(z) = \int_{b\Omega} f(\zeta) B_{n0}(\zeta, z) - \int_{\Omega} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_{n0}(\zeta, z),$$

wobei

$$B_{n0}(\zeta, z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \beta \wedge (\overline{\partial}_\zeta \beta)^{n-1}$$

mit

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{\zeta}^j - \bar{z}^j}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta^j.$$

Man beachte, dass für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ das zweite Integral verschwindet und nur das Integral über den Rand von Ω übrig bleibt. Eine unmittelbare Anwendung der Bochner-Martinelli Formel ist das folgende Resultat.

Satz (Hartogs-Bochner Kugelsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem Rand, $n > 1$. Dann lässt sich jede Funktion $f \in \mathcal{O}(b\Omega)$ zu einer holomorphen Funktion $F \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ fortsetzen.*

Teil 2: Bochner-Martinelli-Koppelman Formel (optional)

Eine weitere Verallgemeinerung der Bochner-Martinelli Formel betrifft den Fall beliebiger (p, q)-Formen an Stelle von $(0, 0)$-Formen (d.h. Funktionen).

Satz (Bochner-Martinelli-Koppelman Formel). *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise C^1-glattem Rand und $f \in C^1_{p,q}(\bar{\Omega})$ mit $f = \sum'_{|I|=p} f_I \wedge dz^I$, $f_I \in C^1_{0,q}$. Dann gilt für jedes $z \in \Omega$*

$$f(z) = \sum_{|I|=p}{}' \Big\{ \int_{b\Omega} f_I(\zeta) B_{nq}(\zeta, z) \\ - \int_\Omega \overline{\partial} f_I(\zeta) \wedge B_{nq}(\zeta, z) - \overline{\partial}_z \int_\Omega f_I(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta, z) \Big\} \wedge dz^I,$$

wobei

$$B_{nq}(\zeta, z) = (-1)^{q(q-1)/2} \binom{n-1}{q} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \beta \wedge (\overline{\partial}_\zeta \beta)^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z \beta)^q$$

mit

$$\beta = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\zeta}^j - \bar{z}^j}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta^j.$$

Eine unmittelbare Anwendung der Bochner-Martinelli-Koppelman Formel und des Hartogs-Bochner Kugelsatzes ist das folgende Resultat.

Satz (Cauchy-Riemann Gleichungen mit kompaktem Träger). *Es sei $n > 1$ und f eine C^1-glatte $\overline{\partial}$-geschlossene $(0, 1)$-Form in $\mathbb{C}^n$ mit kompaktem Träger. Dann gibt es eine C^1-Funktion u mit kompaktem Träger, so dass*

$$\overline{\partial} u = f.$$

Literatur

[1] I. Lieb and J. Michel, *The Cauchy-Riemann complex*, Aspects of Mathematics **E34**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002, p. 9-24, 37-39.

[2] R.M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Texts in Math. **108**, Springer, New York, 1986, p. 144-160.

3. Bochner's Tubensatz (1 Doppelstunde)

Eine wichtige Klasse von Gebieten in $\mathbb{C}^n$ sind die sogenannten *Tubengebiete*, d.h. Gebiete von der Form $\Omega = B + i\mathbb{R}^n$, wobei B ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ist. Ziel dieses Seminarvortrages ist der Beweis des folgenden Fortsetzungssatzes von Bochner, der besagt, dass sich jede holomorphe Funktion auf einem Tubengebiet Ω holomorph auf die konvexe Hülle von Ω fortsetzen lässt.

Satz (Bochner). *Sei $\Omega = B + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ ein Tubengebiet. Dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$\rho \colon \mathcal{O}(\mathrm{co}(\Omega)) \to \mathcal{O}(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren; hierbei bezeichnet $\mathrm{co}(\Omega)$ die konvexe Hülle von Ω.

Literatur

[1] V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, p. 106-109.

4. Charakterisierung parabolischer Mannigfaltigkeiten über ein Stokes-Theorem (1 Doppelstunde)

Eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *parabolisch*, falls jede nach oben beschränkte subharmonische Funktion auf M konstant ist. Parabolische Mannigfaltigkeiten verhalten sich in vielen Situationen ähnlich wie kompakte Mannigfaligkeiten. Sie spielen z.B. eine wichtige Rolle bei der Klassifizierung von Riemannschen Flächen (d.h. 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine kompakte orientierbare Mannigfaligkeiten der Dimension n. Der Satz von Stokes liefert, dass

$$\int_M d\alpha = 0 \quad \text{für alle glatten } (n-1)\text{-Formen } \alpha.$$

Ziel dieses Seminarvortrages ist der Beweis des folgenden Theorems von Glasner.

Satz (Glasner). *Sei M eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann sind äquivalent:*

1. *M ist parabolisch.*
2. *$\int_M d\alpha = 0$ für alle quadratintegriebaren $(n-1)$-Formen α mit $\int_M |d\alpha| < \infty$.*

Literatur

[1] M. Glasner, *Stokes' theorem and parabolicity of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 70-72.

5. Hartogs' Satz über separate Analytizität (2 Doppelstunden)

Aus der reellen Analysis mehrerer Veränderlicher ist bekannt, dass (totale) Differenzierbarkeit partielle Differenzierbarkeit impliziert. Einfache Beispiele zeigen, dass die Umkehrung i.A falsch ist, d.h. partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht totale Differenzierbarkeit.

Der Satz von Hartogs besagt jedoch, dass die entsprechende Aussage in der holomorphen Kategorie wahr ist, d.h. partielle Holomorphie impliziert Holomorphie: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sei $\Omega_{j,a} := \{z \in \mathbb{C} : (a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in \Omega\}$ und für $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei $f_{j,a}\colon \Omega_{j,a} \to \mathbb{C}$ definiert als $f_{j,a}(z) := f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Satz (Hartogs). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass $f_{j,a}\colon \Omega_{j,a} \to \mathbb{C}$ für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und alle $j = 1, 2, \ldots, n$ holomorph ist. Dann ist f holomorph auf Ω.*

Literatur

[1] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, p. 105-107.

[2] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, University of Chicago Press, Chicago, 1971, p. 42-47.

6. Lokale Konvexifizierbarkeit und das Beispiel von Kohn-Nirenberg (1-2 Doppelstunden)

Viele Aussagen über konvexe Gebiete haben natürliche Verallgemeinerungen auf den Fall pseudokonvexer Gebiete (auch wenn die notwendigen Methoden und Beweise teilweise deutlich komplizierter sind). Diese Beobachtung und auch andere Überlegungen werfen die Frage auf, wie sehr sich pseudokonvexe Gebiete von konvexen Gebieten unterscheiden, insbesondere: Ist jedes pseudokonvexe Gebiet in $\mathbb{C}^n$ biholomorph zu einem konvexen Gebiet?

Während man sich sehr leicht überlegt, dass diese (globale) Frage eine negative Antwort hat, ist die Situation für die lokale Variante dieser Frage schwieriger. Verhältnismaßig leicht läßt sich die Situation für den Fall streng pseudokonvexer beschreiben und beweisen.

Satz (Narasimhan). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit C^2-glattem Rand. Ist $p \in b\Omega$ ein streng pseudokonvexer Randpunkt, so gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von p und eine biholomorphe Abbildung $F\colon U \to F(U) \subset \mathbb{C}^n$, so dass $F(\Omega \cap U)$ streng konvex ist.*

Es war eine lange offen stehende Frage, ob ein analoges Resultat auch für den Fall schwach pseudokonvexer Gebiete gilt. Die überraschende Antwort wurde 1973 durch ein Beispiel von Kohn-Nirenberg gefunden.

Satz (Kohn-Nirenberg). *Es gibt ein pseudokonvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ mit reell-analytischem Rand, so dass $0 \in b\Omega$ der einzige schwach pseudokonvexe Randpunkt von Ω ist, aber dennoch keine biholomorphe Abbildung $F\colon U \to F(U) \subset \mathbb{C}^2$ auf einer offenen Umgebung von 0 existiert für die $F(\Omega \cap U)$ konvex ist.*

Literatur

[1] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, p. 130-131.

[2] J.J. Kohn and L. Nirenberg, *A Pseudo-convex Domain not Admitting a Holomorphic Support Function*, Math. Ann. **201** (1973), 265-268.

7. Die Sätze von Rademacher und Alexandrov (2 Doppelstunden)

Plurisubharmonische Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher. Per Definition sind sie zunächst nur oberhalbstetig und nicht notwendigerweise von höherer Regularität. Tatsächlich besitzen plurisubharmonische Funktionen aber immer gewisse Regularitätseigenschaften die echt stärker sind als nur Stetigkeit von oben (ein Beispiel ist die sogenannte *Quasistetigkeit* plurisubharmonischer Funktionen).

In diesem Seminarvortrag sollen zwei klassische Regularitätsaussagen von Rademacher und Alexandrov bewiesen werden. Sie betreffen nicht allgemeine plurisubharmonische Funktionen sondern nur den Speziallfall konvexer Funktionen.

Satz (Rademacher). *Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist fast überall differenzierbar.*

Satz (Alexandrov). *Jede konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist fast überall zweimal differenzierbar.*

Literatur

[1] C.P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex Functions and their Applications*, CMS Books in Math. **23**, Springer, New York, 2006, p. 152-156.

8. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz (2-3 Doppelstunden)

Teil 0: Funktionskeime (optional)

Viele Konstruktionen und Aussagen in der Analysis hängen nur von dem lokalen Verhalten von Funktionen nahe eines betrachten Punktes ab. Eine Methode die Betrachtung lokaler Funktionseigenschaften zu formalisieren ist das Konzept des Funktionskeims.

Definition. Sei $a \in \mathbb{C}^n$. Dann bezeichnet

$$ {}_n\mathcal{O}_a := \varinjlim \{\mathcal{O}(U) : a \in U\} $$

die Menge der holomorphen Funktionskeime in a.

Definition. Sei $a \in \mathbb{C}^n$. Dann bezeichnet

$$ \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}_a := \Big\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z-a)^\alpha : \exists\, r \in \mathbb{R}^n_+, \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |c_\alpha| r^\alpha < \infty \Big\} $$

die Menge der konvergenten Potenzreihen in a.

Lemma. *Die $\mathbb{C}$-Algebren ${}_n\mathcal{O}_a$ und $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}_a$ sind isomorph.*

Teil 1: Weierstraßscher Vorbereitungssatz und Folgerungen

Die Menge aller holomorphen Funktionen nahe $0 \in \mathbb{C}^n$, d.h. die Menge $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} := \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}_0$ aller konvergenten Potenzreihen in 0, bilden eine $\mathbb{C}$-Algebra. Diese $\mathbb{C}$-Algebra hat wichtige algebraische Eigenschaften. Eine offensichtliche Eigenschaft ist die folgende.

Proposition. *Die Algebra $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ ist ein lokaler Ring.*

Die Herleitung weiterer algebraischer Eigenschaften beruht auf dem sogenannten *Weierstraßschen Vorbereitungssatz*, der eine Aussage über die lokale Struktur der Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion macht.

Satz (Weierstraßscher Vorbereitungssatz). *Sei f eine holomorphe Funktion in einem Gebiet $V = V' \times \{|z_n| < R\}$, wobei V' eine Umgebung des Koordinatenursprungs $0'$ in $\mathbb{C}^{n-1}$ ist, und sei $f(0', z_n) \not\equiv 0$ in der Kreisscheibe $|z_n| < R$. Sei $r < R$, so dass die Funktion $f(0', z_n)$ keine Nullstellen auf dem Kreis $|z_n| = r$ besitzt, und sei k die Anzahl ihrer Nullstellen in der Kreisscheibe $U_n := \{|z_n| < r\}$ gezählt mit Vielfachheiten. Dann kann f in einer Umgebung $U := U' \times U_n \subset V$ des Koordinatenursprungs in $\mathbb{C}^n$ in der Form*

$$f(z) = (z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z'))\phi(z)$$

dargestellt werden, wobei die Funktionen $c_j(z')$ holomorph in U' sind, und ϕ holomorph und nullstellenfrei auf U ist.

Funktionen der Form

$$z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z') \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}[z_n]$$

heißen *Weierstraß-Polynome der Ordnung k*. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz besagt also, dass sich eine holomorphe Funktion lokal immer als Produkt eines Weierstraß-Polynoms und einer nicht-verschwindenden holomorphen Funktion darstellen lässt. Aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz folgt leicht die folgende Aussage.

Satz (Weierstraßscher Divisionssatz). *Ist $h \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}[z_n]$ ein Weierstraß-Polynom der Ordnung k und $f \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ eine holomorphe Funktion nahe 0, so gibt es genau eine Darstellung*

$$f = gh + q$$

mit $g \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ und $q \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}[z_n]$ ein Weierstraß-Polynom der Ordnung kleiner als k.

Hieraus (und, im zweiten Fall, mit Hilfe des Hilbertschen Basissatzes) gewinnt man leicht die folgenden Aussagen über die algebraische Struktur von $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Korollar. *Der Ring $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ ist faktoriell.*

Korollar. *Der Ring $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ ist noethersch.*

Literatur

[1] E.M. Chirka, *Complex Analytic Sets*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series) **46**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, p. 3-5.

[2] H. Grauert und R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **265**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, p. 38-46.

[3] V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, p. 123-151.

[4] J.L. Taylor, *Several Complex Variables with Connections to Algebraic Geometry and Lie Groups*, Graduate Studies in Math. bf 46, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, p. 37-45.

9. Die Frölicher-Spektralsequenz (1-2 Doppelstunden)

Nach dem Dolbeault-Lemma ist jede $\overline{\partial}$-geschlossene Differentialform lokal exakt, d.h. für eine (p,q)-Form α mit $\overline{\partial}\alpha = 0$ und $q \geq 1$ existiert lokal eine $(p,q-1)$-Form β mit $\overline{\partial}\beta = \alpha$. Global ist dies auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X im Allgemeinen nicht mehr zutreffend, und die Dolbeault-Kohomologie-Gruppen $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) := \frac{\ker\left(\mathcal{E}^{p,q}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,q+1}(X)\right)}{\mathrm{Bild}\left(\mathcal{E}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,q}(X)\right)}$ messen, wie "unexakt" $\overline{\partial}$-geschlossene Formen sind.

Zudem können auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X die de-Rham-Kohomologie-Gruppen $H^k_d(X) := \frac{\ker\left(\mathcal{E}^{k}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1}(X)\right)}{\mathrm{Bild}\left(\mathcal{E}^{k-1}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k}(X)\right)}$ betrachtet werden, welche die "Unexaktheit" von Differentialformen bezüglich $d = \partial + \overline{\partial}$ messen. Im Gegensatz zur Dolbeault-Kohomologie ist die de-Rham-Kohomologie nach dem Satz von de Rham eine rein topologische Invariante.

Aufgrund der Zerlegung $\mathcal{E}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{p,q}(X)$ ist auch eine Beziehung zwischen der Dolbeault-Kohomologie und der de-Rham-Kohomologie zu erwarten. Die Frölicher-Spektralsequenz ist eine Konstruktion, die beschreibt, wie man aus der Dolbeault-Kohomologie Informationen über die de-Rham-Kohomologie und damit topologische Invarianten erhalten kann. Spektralsequenzen sind zudem davon unabhängig von Interesse und stellen ein wichtiges Hilfsmittel in der Homologischen Algebra dar.

Literatur

[1] A. Frölicher, *Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41 (1955), 641–644**