Prof. Dr. N. Shcherbina
Dipl. Math. T. Harz

Bergische Universität Wuppertal
14.10.2015

Nachklausur Einführung in die Funktionentheorie (SoSe 2015) Musterlösung

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

a) Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

b) Sei $f(z) := \bar{z}$. Dann ist f aufgefasst als Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Form $f(x, y) = (x, -y)$, d.h. f ist reell differenzierbar (denn alle Komponentenfunktionen sind Polynome, also reell differenzierbar). Für die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt aber $(\partial f / \partial \bar{z})(z) \equiv 1 \neq 0$, d.h. f ist in keinem Punkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

c) Da $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| < 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$, folgt nach dem Satz von Liouville, das f konstant ist. Da $f(0) = 1$ folgt dann, dass $f \equiv 1$.

Aufgabe 2. (4+8 Punkte)

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Das Maximumsprinzip hat verschiedene äquivalente Formulierungen (es genügt nur eine davon anzugeben), z.B.:

(1) Nimmt f in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

(2) Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit $\bar{D} \subset G$ so gilt $|f(z)| \leq \max_{\partial D} |f|$ für alle $z \in \bar{D}$.

b) Wegen $f(\partial\Delta) \subset \partial\Delta$ ist $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \partial\Delta$. Nach dem Maximumsprinzip folgt, dass $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \bar{\Delta}$. Angenommen f hat keine Nullstelle in Δ. Da $f \neq 0$ auf $\partial\Delta$, folgt dann $f \neq 0$ auf $\bar{\Delta}$, und wegen der Stetigkeit von f sogar $f \neq 0$ in einer offenen Umgebung von $\bar{\Delta}$. Insbesondere ist $1/f$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von $\bar{\Delta}$. Da $|(1/f)(z)| = 1/|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\Delta$, folgt wieder nach dem Maximumsprinzip, dass $|(1/f)(z)| \leq 1$ für alle $z \in \bar{\Delta}$. Zusammen folgt, dass $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \bar{\Delta}$, d.h. $f(\bar{\Delta}) \subset \partial\Delta$. Da $\partial\Delta$ keine inneren Punkte hat, folgt aus dem Offenheitssatz, dass f auf Δ konstant ist. Wegen dem Identitätssatz ist f dann auch auf ganz G konstant. Widerspruch zur Annahme, dass f nichtkonstant ist.

Aufgabe 3. (4+4+4 Punkte)

(i) Da die Funktion $f(z) := (z-1)e^z$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0, 2)$ holomorph ist, folgt mit der Integralformel von Cauchy, dass

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{(z-1)e^z}{z+1} = \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z+1} = 2\pi i f(-1) = -\frac{4\pi i}{e}.$$

(ii) Es gilt $z^2-4z+3=(z-1)(z-3)$. Da die Funktion $f(z):=\dfrac{\sin(z)}{z-3}$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0,2)$ holomorph ist, folgt mit der Integralformel von Cauchy, dass

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z^2-4z+3} = \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z-1} = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot \frac{\sin(1)}{-2} = \sin(-1)\pi i.$$

(iii) Da die Funktion $f(z):=z$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0,2)$ holomorph ist, folgt mit der Integralformel von Cauchy für die zweite Ableitung (oder mit dem Residuuensatz), dass

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $f(z):=8z^2$ und sei $g(z):=4z^5+8z^2+2z+1$. Dann gilt

$$|f(z)| = 8 \quad \text{auf } \partial\Delta$$

und

$$|g(z)-f(z)| = |4z^5+2z+1| \leq 4|z|^5+2|z|+1 = 7 \quad \text{auf } \partial\Delta,$$

also

$$|g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \text{auf } \partial\Delta.$$

Da f und g holomorph in einer Umgebung von $\bar{\Delta}$ sind, folgt aus dem Satz von Rouché, dass f und g gleich viele Nullstellen in Δ haben. Da f offenbar genau zwei Nullstellen in Δ hat (gezählt mit Vielfachheiten), hat also auch g genau zwei Nullstellen in Δ (gezählt mit Vielfachheiten).

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

(i) Es gilt $\sin(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$, also

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \cdots .$$

Dies ist gerade die Laurentreihenentwicklung von $\frac{\sin(z)}{z}$ auf einer punktierten Kreisscheibe um 0. Da der Hauptteil verschwindet folgt, dass die isolierte Singularität $z_0=0$ hebbar ist, und dass $\operatorname{res}_0 \frac{\sin(z)}{z} = 0$.

(ii) Es gilt $\sin(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$, also

$$\sin(\frac{1}{z}) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{-2j-1}}{(2j+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} \pm \cdots .$$

Dies ist gerade die Laurentreihenentwicklung von $\sin(\frac{1}{z})$ auf einer punktierten Kreisscheibe um 0. Da der Hauptteil unendlich viele nicht verschwindende Summanden hat folgt, dass die isolierte Singularität $z_0 = 0$ wesentlich ist. Das Residuum liest man aus obiger Reihenentwicklung ab zu $\operatorname{res}_0 \sin(\frac{1}{z}) = 1$.

Aufagbe 6. (6+6 Punkte)

(i) Sei $f(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2)} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)}$. Die Funktion f ist holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene bis auf die einfachen Polstellen $z_1 := i$ und $z_2 := \sqrt{2}i$, und diese Polstellen liegen nicht auf der reellen Achse. Ferner ist f eine rationale Funktion mit der Eigenschaft, dass der Nennergrad mindestens um zwei größer ist als der Zählergrad (d.h. es gilt $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$). Wir können also den Residuenssatz zur Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ benutzen. Es gilt

$$\operatorname{res}_i f = \lim_{z\to i} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\Big|_{z=i} \big[(z-i)f(z)\big] = \frac{1}{(z+i)(z^2+2)}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i},$$

$$\operatorname{res}_{\sqrt{2}i} f = \lim_{z\to\sqrt{2}i} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\Big|_{z=\sqrt{2}i} \big[(z-\sqrt{2}i)f(z)\big] = \frac{1}{(z^2+1)(z+\sqrt{2}i)}\Big|_{z=\sqrt{2}i} = -\frac{1}{2\sqrt{2}i}.$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = 2\pi i \cdot \Big(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2\sqrt{2}i}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\pi.$$

(ii) Sei $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mit $z = e^{it}$ ist $\sin(t) = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = iz\,dt$. Damit wird

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{10+8\sin(t)} &= \int_{\partial\Delta} \frac{1}{10-4i(z-z^{-1})} \frac{dt}{iz} = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{4z^2+10iz-4}\,dz \\ &= \frac{1}{4}\int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^2+\frac{5}{2}iz-1}\,dz = \frac{1}{4}\int_{\partial\Delta} \underbrace{\frac{1}{(z+\frac{i}{2})(z+2i)}}_{=:f(z)}\,dz.\end{aligned}$$

In $\overline{\Delta}$ besitzt der Integrand $f(z)$ einen einfachen Pol in $z = -\frac{i}{2}$. Das entsprechende Residuum des Integranden lautet

$$\operatorname{res}_{-i/2} f = \lim_{z\to -i/2} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\Big|_{z=-i/2} \big[(z+i/2)f(z)\big] = \frac{1}{z+2i}\Big|_{z=-i/2} = -\frac{2}{3}i.$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{10+8\sin(t)} = \frac{1}{4}\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i \cdot \Big(-\frac{2}{3}i\Big) = \frac{\pi}{3}.$$