BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Nachklausur zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina 14.10.2015, 12:30 Uhr

Name	Matr.Nr.	Studienfach	Fachsemester

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	12	12	12	6	6	12	60	

Wichtige Hinweise:

1. Tragen Sie in die obigen Felder Name, Vorname, Matrikelnummer, Studienfach und Fachsemester ein.
2. Außer Schreibwerkzeug sind keinerlei weitere Hilfsmittel zugelassen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte aus 6 Aufgaben bestehen.
4. Benutzen Sie nur die ausgehändigten Klausurbögen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung.
5. Bitte schreiben Sie in Ihrem eigenen Interesse leserlich und geben Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an. Begründen Sie Ihre Antworten!
6. Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit Rot.
7. **DIE KLAUSUR IST MIT 30 PUNKTEN BESTANDEN !!**

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine C^1-Funktion. Wann heißt f komplex differenzierbar in $z_0 \in U$?

b) Geben Sie eine Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die in $0 \in \mathbb{C}$ reell differenzierbar aber dort nicht komplex differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ mit $f(0) = 1$ gibt.

Aufgabe 2. (4+8 Punkte)

a) Formulieren Sie das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen.

b) Es bezeichne $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen mit $\bar{\Delta} \subset G$, und sei $f \colon G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(\partial\Delta) \subset \partial\Delta$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in Δ hat.

Aufgabe 3. (4+4+4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{(z-1)e^z}{z+1}$

(ii) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z^2 - 4z + 3}$

(iii) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{z}{(z-1)^2}$

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der Funktion $z \mapsto 4z^5 + 8z^2 + 2z + 1$ in $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Art der Singularität und das Residuum der folgenden Funktionen in $z_0 = 0$:

(i) $\displaystyle\frac{\sin z}{z}$

(ii) $\displaystyle\sin\left(\frac{1}{z}\right)$

Aufgabe 6. (6+6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{10 + 8\sin(t)}$