Prof. Dr. N. Shcherbina
Dipl. Math. T. Harz

Bergische Universität Wuppertal
27.07.2015

Klausur Einführung in die Funktionentheorie (SoSe 2015) Musterlösung

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

a) Mit $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ lauten die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) Sei $f(x + iy) = x^2$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = x.$$

Also ist $(\partial f/\partial \bar{z})(0) = 0$, d.h. f ist komplex differenzierbar in 0. Aber $(\partial f/\partial \bar{z})(1/n) = 1/n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt keine offene Umbegung von 0 auf der f komplex differenzierbar ist, d.h. f ist nicht holomorph in 0.

c) Nein: Die Menge $M := \{\frac{1}{2n} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ und es ist $f|_M \equiv 0$. Nach dem Identitätssatz folgt, dass $f \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$. Widerspruch zu $f(1) = 1$.

Aufgabe 2. (4+8 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

b) Nein: Da $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Funktion $g(z) := 1/f(z)$ wohldefiniert und holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da $|f| > 1$ ist, folgt $|g| < 1$, d.h. g ist beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz setzt sich g zur einer holomorphen und beschränkten Funktion auf $\mathbb{C}$ fort. Nach dem Satz von Liouville folgt, dass g konstant ist. Also ist auch f konstant.

Aufgabe 3. (4+2 Punkte)

(i) Nein: Da

$$\Delta u(x + iy) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(x^2 + y^2) = \frac{\partial^2(x^2 + y^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2 + y^2)}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \neq 0,$$

ist u nicht harmonisch auf $\mathbb{C}$. Also kann u nicht Realteil einer holomorphen Funkion sein.

(ii) Ja: Mit $f(z) = z^2 + 2z$ gilt $\operatorname{Re} f = u$.

Aufgabe 4. (4+4+2 Punkte)
(i) Da die Funktion $f(z) := ze^z$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0,2)$ holomorph ist, folgt mit der Integralformel von Cauchy, dass

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{ze^z}{z-1} = \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z-1} = 2\pi i f(1) = 2\pi e i.$$

(ii) Es gilt $z^2+4z+3 = (z+1)(z+3)$. Da die Funktion $f(z) := \dfrac{\cos z}{z+3}$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0,2)$ holomorph ist, folgt mit der Integralformel von Cauchy, dass

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\cos z}{z^2+4z+3} = \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z+1} = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \cdot \frac{\cos(1)}{2} = \cos(1)\pi i.$$

(iii) Da die Funktion $f(z) := \dfrac{e^{z^2+\sin z}}{4(z-2)^2 e^{\cos z}}$ in einer Umgebung von $\bar{B}(0,1)$ holomorph ist, folgt mit dem Integralssatz von Cauchy, dass

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^{z^2+\sin z}}{4(z-2)^2 e^{\cos z}} = 0.$$

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Es gilt $z^2+4z+3 = (z+1)(z+3)$. Partialbruchzerlegung von f liefert, dass

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+3}.$$

Für $z \in A_{2,4}(1)$ gilt $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ und $\left|\frac{z-1}{4}\right| < 1$, also

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{-2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{(z-1)^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{(z-1)^{j+1}},$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{-4}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-1)^j}{(-4)^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-1)^j}{(-4)^{j+1}}.$$

Damit ergibt sich, dass

$$f(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^{j-1}}{(z-1)^j} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(z-1)^j}{(-4)^{j+1}}.$$

Also lautet der Hauptteil von f auf $A_{2,4}(1)$ gerade $-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^{j-1}}{(z-1)^j}$. Da f in einer Umgebung von 1 holomorph ist, gilt $\mathrm{res}_1 f = 0$. (Achtung: Um das Residuum aus der Laurentreihe abzulesen, hätte man die Reihenentwicklung in $A_{0,2}(1)$ betrachten müssen!)

Aufagbe 6. (6+6 Punkte)

(i) Sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{(z-3i)^2(z+3i^2)}$. Die Funktion f ist holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene bis auf den zweifachen Pol $3i$, und dieser Pole liegt nicht auf der reellen Achse. Ferner ist f eine rationale Funktion mit der Eigenschaft, dass der Nennergrad mindestens um zwei größer ist als der Zählergrad (d.h. es gilt $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$). Wir können also den Residuenssatz zur Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ benutzen. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{3i} f &= \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\Big|_{z=3i} \big[(z-3i)^2 f(z)\big] = \frac{d}{dz}\Big|_{z=3i} \frac{1}{(z+3i)^2} = \frac{-2}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i} \\ &= \frac{1}{108i}.\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{108i} = \frac{\pi}{54}.$$

(ii) Sei $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mit $z = e^{it}$ ist $\cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $dz = iz\,dt$. Damit wird

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos(t)} &= \int_{\partial\Delta} \frac{1}{5-2(z+z^{-1})} \frac{dt}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\partial\Delta} \frac{1}{-2z^2+5z-2}\,dz \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\,dz = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Delta} \underbrace{\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}}_{=:f(z)}\,dz.\end{aligned}$$

In $\bar{\Delta}$ besitzt der Integrand $f(z)$ einen einfachen Pol in $z = \frac{1}{2}$. Das entsprechende Residuum des Integranden lautet

$$\operatorname{res}_{1/2} f = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\Big|_{z=1/2} \big[(z-1/2)f(z)\big] = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=1/2} = -\frac{2}{3}.$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\cos(t)} = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Delta} f(z)dz = -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \Big(-\frac{2}{3}\Big) = \frac{2\pi}{3}.$$