BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Klausur zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina 27.07.2015, 12:30 Uhr

Name	Matr.Nr.	Studienfach	Fachsemester

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	12	12	6	10	8	12	60	

Wichtige Hinweise:

1. Tragen Sie in die obigen Felder Name, Vorname, Matrikelnummer, Studienfach und Fachsemester ein.
2. Außer Schreibwerkzeug sind keinerlei weitere Hilfsmittel zugelassen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte aus 6 Aufgaben bestehen.
4. Benutzen Sie nur die ausgehändigten Klausurbögen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung.
5. Bitte schreiben Sie in Ihrem eigenen Interesse leserlich und geben Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an. Begründen Sie Ihre Antworten!
6. Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit Rot.
7. **DIE KLAUSUR IST MIT 30 PUNKTEN BESTANDEN !!**

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine C^1-Funktion. Formulieren Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen zur Charakterisierung der Holomorphie von f.

b) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die in $0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar aber dort nicht holomorph ist.

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$?

Aufgabe 2. (4+8 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

b) Gibt es eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$?

Aufgabe 3. (4+2 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind Realteil einer holomorphen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

(i) $u(x+iy) = x^2 + y^2$

(ii) $u(x+iy) = x^2 - y^2 + 2x$

Aufgabe 4. (4+4+2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $$\int_{\partial B(0,2)} \frac{ze^z}{z-1}$$

(ii) $$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\cos z}{z^2+4z+3}$$

(iii) $$\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^{z^2+\sin z}}{4(z-2)^2 e^{\cos z}}$$

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+4z+3}$ in dem Kreisring $A_{2,4}(1) := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1| < 4\}$ in eine Laurentreihe. Bestimmen Sie ferner den Hauptteil dieser Laurentreihe sowie das Residuum von f in $z_0 = 1$

Aufagbe 6. (6+6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

(ii) $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos(t)}$$