

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015  
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Musterlösung

**Aufgabe 1** a) Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie die Laurentreihen von  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  in den Mengen

(i)  $A_{a,b}^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < |a-b|\}$

(ii)  $A_{a,b}^- := \{z \in \mathbb{C} : |a-b| < |z-b|\}$

b) Berechnen Sie die Laurentreihen von  $f(z) = \frac{4z - z^2}{(z+1)(z^2-4)}$  in den Kreisingen

(i)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(ii)  $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$

(iii)  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$

**Lösung zu Aufgabe 1:** a) Ist  $a = b$ , so ist  $A_{a,a}^+ = \emptyset$  und  $A_{a,b}^- = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  ist dann selbst schon die Laurentreihe von  $f$  um  $a$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Im folgenden sei also  $a \neq b$ .

(i) Ist  $|\frac{z-b}{a-b}| < 1$ , so gilt

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b+b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-b}{a-b}} = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-b)^j}{(a-b)^j} = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-b)^j}{(a-b)^{j+1}}.$$

(ii) Ist  $|\frac{a-b}{z-b}| < 1$ , so gilt

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b+b-a} = \frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-b}{z-b}} = \frac{1}{z-b} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a-b)^j}{(z-b)^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a-b)^j}{(z-b)^{j+1}}$$

b) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{4z - z^2}{(z+1)(z^2-4)} = \frac{5/3}{z+1} - \frac{3}{z+2} + \frac{1/3}{z-2}.$$

(i) Für  $z \in \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j+1}}, \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(-2)^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(-2)^{j+1}}, \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{2^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{2^{j+1}}.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{5}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j+1}} + 3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(-2)^{j+1}} - \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{2^{j+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5(-1)^{j-1}}{3} \frac{1}{z^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{9 + (-1)^j}{3(-2)^{j+1}} z^j.\end{aligned}$$

(ii) Für  $z \in \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$  gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j+1}}, \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{z^{j+1}}, \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{z^{j+1}},\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{5}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j+1}} - 3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^j}{z^{j+1}} + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{z^{j+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{5}{3} (-1)^{j-1} - 3(-2)^{j-1} + \frac{1}{3} 2^{j-1} \right] \frac{1}{z^j}.\end{aligned}$$

(iii) Für  $z \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$  gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z+1}, \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{(z+1)+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (z+1)^j, \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z+1)-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+1)^j}{3^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+1)^j}{3^{j+1}}.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5}{3} \frac{1}{z+1} - 3 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (z+1)^j - \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+1)^j}{3^{j+1}} \\ &= \frac{5}{3} \frac{1}{z+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ 3(-1)^{j+1} - \frac{1}{3^{j+2}} \right] (z+1)^j. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie jeweils die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

(i)  $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(ii)  $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$

(iii)  $e^{1/z} + \frac{1}{z}$

**Lösung zu Aufgabe 2:** (i) Die Funktion  $f_1(z) := \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0 = 0$ . Es ist

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}}{z^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j-2}}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^{2j}}{(2j+2)!}.$$

Der Hauptteil von  $f_1$  in 0 verschwindet, d.h. die Singularität in  $z_0 = 0$  ist hebbar, und  $\text{res}_0 f = 0$ .

(ii) Die Funktion  $f_2(z) := \frac{1}{(z^2+1)^2}$  hat isolierte Singularitäten in  $z_0 = i$  und  $z_0 = -i$ . Zunächst betrachten wir die Singularität  $z_0 = i$ . Da  $f_2(z) = \frac{1}{(z+i)^2} \frac{1}{(z-i)^2}$  und da  $\frac{1}{(z+i)^2}$  in der Nähe von  $z_0 = i$  holomorph ist, hat  $f_2$  einen Pole zweiter Ordnung in  $z_0 = i$ . Daher gilt für das Residuum

$$\text{res}_i f_2 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \Big|_{z=i} (z-i)^2 f_2(z) = \frac{d}{dz} \Big|_{z=i} \frac{1}{(z+i)^2} = -2 \frac{1}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = -\frac{i}{4}.$$

Der Hauptteil von  $f_2$  in  $z_0 = i$  ist dann wegen

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \Big|_{z=i} [(z-i)^2 f_2(z)] = -i/4 \\ a_{-2} &= \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}} \Big|_{z=i} [(z-i)^2 f_2(z)] = 1/4 \end{aligned}$$

gerade  $\frac{-1/4}{(z-i)^2} + \frac{-i/4}{z+i}$ .

Nun betrachten wir die Singularität  $z_0 = -i$ . Alternativ zu obiger Vorgehensweise für  $z_0 = i$  argumentieren wir diesmal wie folgt: Für  $z$  nahe  $z_0 = -i$  gilt

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+i)-2i} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}} = -\frac{1}{2i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+i)^j}{(2i)^j} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+i)^j}{(2i)^{j+1}}.$$

Also gilt nahe  $z_0 = -i$

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{z-i} = \frac{d}{dz} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z+i)^j}{(2i)^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(z+i)^{j-1}}{(2i)^{j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{(2i)^{j+2}} (z+i)^j$$

nach dem Satz über Differenziation von Potenzreihen, oder alternativ

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{1}{(2i)^{k+1}} \frac{1}{(2i)^{j-k+1}} (z+i)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{(2i)^{j+2}} (z+i)^j.$$

nach dem Satz über das Cauchyprodukt. Es folgt, dass

$$f_2(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{(2i)^{j+2}} (z+i)^{j-2} = \frac{-1/4}{(z+i)^2} + \frac{i/4}{z+i} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+3}{(2i)^{j+4}} (z+i)^j.$$

Daraus liest man sofort ab, dass der Hauptteil von  $f_2$  in  $z_0 = -i$  gerade  $\frac{-1/4}{(z+i)^2} + \frac{i/4}{z+i}$  lautet, dass  $f_2$  in  $z_0 = -i$  einen Pol zweiter Ordnung hat und dass  $\text{res}_{-i} f_2 = i/4$ .

(iii) Die Funktion  $f_3(z) := e^{1/z} + \frac{1}{z}$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0 = 0$ . Es gilt

$$e^{1/z} + \frac{1}{z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{z^j} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{2}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{z^j}.$$

Also lautet der Hauptteil von  $f_3$  in  $z_0 = 0$  gerade  $\frac{2}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{z^j}$ ,  $f_3$  hat in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität und  $\text{res}_0 f_3 = 2$ .

**Aufgabe 3** a) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und sei  $\{f_k\}$  eine Folge holomorpher Funktionen  $f_k: G \rightarrow \mathbb{C}$  die kompakt gegen eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Zeigen Sie: Sind alle  $f_k$  nullstellenfrei, so ist  $f$  nullstellenfrei oder  $f \equiv 0$ .

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) folgender Polynome in folgenden Mengen:

(i)  $2z^4 + 5z + 2$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

(ii)  $z^7 + 5z^4 + iz^2 + 2$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

**Lösung zu Aufgabe 3:** a) Angenommen  $f \not\equiv 0$ . Wir müssen zeigen, dass  $f$  nullstellenfrei ist. Angenommen das ist nicht der Fall, so existiert ein  $z_0 \in G$  mit  $f(z_0) = 0$ . Da  $f \not\equiv 0$  gibt es nach dem Identitätssatz (siehe auch Aufgabe 3a von Blatt 11) eine kleine Scheibe  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ , so dass  $\bar{\Delta} \subset G$  und so dass  $z_0$  die einzige Nullstelle von  $f$  in  $\bar{\Delta}$  ist. Da  $\partial\Delta \subset G$  kompakt und  $0 < |f|$  auf  $\partial\Delta$  ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so dass

$$\delta < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial\Delta.$$

Da  $\bar{\Delta} \subset G$  kompakt ist und  $f_k$  auf  $G$  kompakt gegen  $f$  konvergiert, gibt es ferner ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k \geq k_0$  gilt

$$|f_k(z) - f(z)| < \delta \quad \text{für alle } z \in \partial\Delta.$$

Also

$$|f_k(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial\Delta.$$

Nach dem Satz von Rouché folgt, dass  $f$  und  $f_k$  in  $\Delta$  gleich viele Nullstellen haben. Aber per Annahme hat  $f$  eine Nullstelle in  $z_0 \in \Delta$ , während  $f_k$  in  $\Delta$  nullstellenfrei ist. Widerspruch.

b) Sei  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . (Im folgenden werden Nullstellen immer mit Vielfachheiten gezählt!)

(i) Sei  $f(z) := 5z$  und sei  $g(z) := 2z^4 + 5z + 2$ . Dann gilt

$$|f(z)| = 5 \quad \text{auf } \partial\Delta$$

und

$$|g(z) - f(z)| = |2z^4 + 2| \leq 2|z|^4 + 2 = 4 \quad \text{auf } \partial\Delta,$$

also

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{auf } \partial\Delta.$$

Da  $f$  und  $g$  holomorph sind, folgt aus dem Satz von Rouché, dass  $f$  und  $g$  gleich viele Nullstellen in  $\Delta$  haben. Da  $f$  offenbar genau eine Nullstelle in  $\Delta$  hat, hat also auch  $g$  genau eine Nullstelle in  $\Delta$ . Da ferner  $g(z) \geq 5|z| - 2|z|^4 - 2 \geq 1$  auf  $\partial\Delta$ , folgt dass  $g$  auch auf  $\bar{\Delta}$  genau eine Nullstelle hat. Da aber  $g$  als Polynom 4. Grades genau vier Nullstellen in  $\mathbb{C}$  hat, folgt dass  $g$  genau 3 Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$  hat.

(ii) Sei  $f(z) := 5z^4$  und sei  $g(z) := z^7 + 5z^4 + iz^2 + 2$ . Dann gilt

$$|f(z)| = 5 \quad \text{auf } \partial\Delta$$

und

$$|g(z) - f(z)| = |z^7 + iz^2 + 2| \leq |z|^7 + |z^2| + 2 = 4 \quad \text{auf } \partial\Delta,$$

also

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{auf } \partial\Delta.$$

Da  $f$  und  $g$  holomorph sind, folgt aus dem Satz von Rouché, dass  $f$  und  $g$  gleich viele Nullstellen in  $\Delta$  haben. Da  $f$  offenbar genau vier Nullstelle in  $\Delta$  hat, hat also auch  $g$  genau vier Nullstelle in  $\Delta$ .

**Aufgabe 4** a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} \quad (a > |b|)$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$$

**Lösung zu Aufgabe 4:** a) Sei  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

(i) Mit  $z = e^{it}$  ist  $\cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2}$  und  $\cos(3t) = \frac{z^3+z^{-3}}{2}$ ,  $dz = iz dt$ . Damit wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt &= \int_{\partial\Delta} \frac{1}{iz} \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 2(z+z^{-1})} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Delta} \frac{z^6 + 1}{z^4(5 - 2(z+z^{-1}))} dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\partial\Delta} \frac{z^6 + 1}{z^3(-2z^2 + 5z - 2)} dz = -\frac{1}{4i} \int_{\partial\Delta} \underbrace{\frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)}}_{=:f(z)} dz. \end{aligned}$$

In  $\bar{\Delta}$  besitzt der Integrand  $f(z)$  einen dreifachen Pol in  $z = 0$  und einen einfachen Pol in  $z = 1/2$  und ist sonst holomorph. Die entsprechenden Residuen des Integranden lauten

$$\begin{aligned} \text{res}_0 f &= \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \Big|_{z=0} [z^3 f(z)] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \Big|_{z=0} \frac{z^6 + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} = \dots = \frac{21}{4}, \\ \text{res}_{1/2} f &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \Big|_{z=1/2} [(z - \frac{1}{2})f(z)] = \frac{z^6 + 1}{z^3(z - 2)} \Big|_{z=1/2} = -\frac{65}{12}. \end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt = -\frac{1}{4i} \int_{\partial\Delta} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{4i} \left( \frac{21}{4} - \frac{65}{12} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

(ii) Für  $b = 0$  berechnet sich das Integral sofort zu  $\frac{2\pi}{a^2}$ . Sei nun  $b \neq 0$ . Mit  $z = e^{it}$  ist  $\cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ ,  $dz = iz dt$ . Damit wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} &= \int_{\partial\Delta} \frac{1}{iz} \frac{dz}{[a + \frac{b}{2}(z + z^{-1})]^2} = \frac{1}{i} \int_{\partial\Delta} \frac{z}{[az + \frac{b}{2}(z^2 + 1)]^2} dz \\ &= \frac{4}{ib^2} \int_{\partial\Delta} \frac{z}{[z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1]^2} dz \\ &= \frac{4}{ib^2} \int_{\partial\Delta} \frac{z}{\underbrace{\left(z + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)^2 \left(z + \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)^2}_{=: f(z)}} dz. \end{aligned}$$

In  $\bar{\Delta}$  besitzt der Integrand  $f(z)$  wegen  $a > |b|$  einen zweifachen Pol in  $z_0 := -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$  und ist sonst holomorph. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir  $z_1 := -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ . Das Residuum von  $f$  in  $z_0$  lautet dann

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0} f &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \Big|_{z=z_0} [(z - z_0)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \Big|_{z=z_0} \frac{z}{(z - z_1)^2} \\ &= \frac{(z - z_1)^2 - 2z(z - z_1)}{(z - z_1)^4} \Big|_{z=z_0} = \frac{z - z_1 - 2z}{(z - z_1)^3} \Big|_{z=z_0} = -\frac{z_0 + z_1}{(z_0 - z_1)^3}. \end{aligned}$$

Wegen  $z_0 + z_1 = -\frac{2a}{b}$  und  $z_0 - z_1 = 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$  ist also

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{a}{4b(\frac{a^2}{b^2} - 1)^{3/2}}.$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} &= \frac{4}{ib^2} \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \frac{4}{ib^2} \cdot \frac{2\pi ia}{4b(\frac{a^2}{b^2} - 1)^{3/2}} = \frac{2\pi a}{b^3(\frac{a^2}{b^2} - 1)^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

b) (i) Sei  $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ . Die Funktion  $f$  ist holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene bis auf die endlich vielen Pole  $i$  und  $2i$ , und diese Pole liegen nicht auf der reellen Achse. Ferner ist  $f$  eine rationale Funktion mit der Eigenschaft, dass der Nennergrad mindestens um zwei größer ist als der Zählergrad (d.h. es gilt  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ ). Wir können also den Residuensatz zur Berechnung des Integrals benutzen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  benutzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \Big|_{z=i} [(z-i)f(z)] = \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} = -\frac{i}{6}, \\ \operatorname{res}_{2i} f &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \Big|_{z=2i} [(z-2i)f(z)] = \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} \Big|_{z=2i} = \frac{i}{12}. \end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \left( -\frac{i}{6} + \frac{i}{12} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

(ii) Sei  $f(z) := \frac{z^2}{z^4+6z^2+5} = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+5)}$ . Die Funktion  $f$  ist holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene bis auf die endlich vielen Pole  $i$  und  $i\sqrt{5}$ , und diese Pole liegen nicht auf der reellen Achse. Ferner ist  $f$  eine rationale Funktion mit der Eigenschaft, dass der Nennergrad mindestens um zwei größer ist als der Zählergrad (d.h. es gilt  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ ). Wir können also den Residuensatz zur Berechnung des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  benutzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \Big|_{z=i} [(z-i)f(z)] = \frac{z^2}{(z+i)(z^2+5)} \Big|_{z=i} = \frac{i}{8}, \\ \operatorname{res}_{i\sqrt{5}} f &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \Big|_{z=i\sqrt{5}} [(z-i\sqrt{5})f(z)] = \frac{z^2}{(z^2+1)(z+i\sqrt{5})} \Big|_{z=i\sqrt{5}} = -\frac{i\sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5} = 2\pi i \left( \frac{i}{8} - \frac{i\sqrt{5}}{8} \right) = \frac{\pi}{4}(\sqrt{5}-1).$$

Da  $f$  eine gerade Funktion ist, folgt schließlich

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5} = \frac{\pi}{8}(\sqrt{5}-1).$$