

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: Entfällt

Aufgabe 1 a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Laurentreihen von $f(z) = \frac{1}{z - a}$ in den Mengen

(i) $A_{a,b}^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < |a - b|\}$

(ii) $A_{a,b}^- := \{z \in \mathbb{C} : |a - b| < |z - b|\}$

b) Berechnen Sie die Laurentreihen von $f(z) = \frac{4z - z^2}{(z + 1)(z^2 - 4)}$ in den Kreisringen

(i) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$

(iii) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + 1| < 1\}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

(i) $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(ii) $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$

(iii) $e^{1/z} + \frac{1}{z}$

Aufgabe 3 a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $\{f_k\}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_k: G \rightarrow \mathbb{C}$ die kompakt gegen eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: Sind alle f_k nullstellenfrei, so ist f nullstellenfrei oder $f \equiv 0$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) folgender Polynome in folgenden Mengen:

(i) $2z^4 + 5z + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

(ii) $z^7 + 5z^4 + iz^2 + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

BITTE WENDEN

Aufgabe 4 a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} \quad (a > |b|)$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$$