

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015  
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: Entfällt

**Aufgabe 1** a) Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie die Laurentreihen von  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  in den Mengen

(i)  $A_{a,b}^+ := \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < |a-b|\}$

(ii)  $A_{a,b}^- := \{z \in \mathbb{C} : |a-b| < |z-b|\}$

b) Berechnen Sie die Laurentreihen von  $f(z) = \frac{4z - z^2}{(z+1)(z^2-4)}$  in den Kreisringen

(i)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(ii)  $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$

(iii)  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie jeweils die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

(i)  $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(ii)  $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$

(iii)  $e^{1/z} + \frac{1}{z}$

**Aufgabe 3** a) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und sei  $\{f_k\}$  eine Folge holomorpher Funktionen  $f_k: G \rightarrow \mathbb{C}$  die kompakt gegen eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Zeigen Sie: Sind alle  $f_k$  nullstellenfrei, so ist  $f$  nullstellenfrei oder  $f \equiv 0$ .

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) folgender Polynome in folgenden Mengen:

(i)  $2z^4 + 5z + 2$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

(ii)  $z^7 + 5z^4 + iz^2 + 2$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

BITTE WENDEN

**Aufgabe 4** a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} \quad (a > |b|)$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 5} dx$$