BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 09.07.2015, 14 Uhr

Aufgabe 1 a) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{3z^2+1}{z+1}$ jeweils in eine Potenzreihe um die Punkte $z_1 = 2$ und $z_2 = i$.

b) Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Potenzreihenentwicklung von f um $\frac{1}{2}$ habe den Radius $\frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass f in keine Umgebung von 1 holomorph fortgesetzt werden kann (d.h. es ist nicht möglich ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{D} \cup B(1,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ zu finden, so dass $\tilde{f}|_{\mathbb{D}} = f$).

Aufgabe 2 Bestimmen Sie, ob es eine in 0 holomorphe Funktion f gibt, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2-1}$

(ii) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \end{cases}$

(iii) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}(0) = (n!)^2$

Aufgabe 3 a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist f nicht die Nullfunktion, so ist $\mathcal{N}(f) := \{z \in U : f(z) = 0\}$ lokal endlich in U.

b) Es seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft $|f(z)| \le |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f = \lambda \cdot g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \le 1$.

Aufgabe 4 a) Sei f holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Nimmt $\operatorname{Re} f$ auf G ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

b) Seien f, g holomorphe Funktionen nahe des Abschlusses der Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $h(z) := |f(z)| + |g(z)|$ ihr Maximum in $\overline{\mathbb{D}}$ auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$ annimmt.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.