

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015  
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 02.07.2015, 14 Uhr

---

**Aufgabe 1** Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  die Einheitskreisscheibe, sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen mit  $\bar{\mathbb{D}} \subset U$  und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt.$$

**Aufgabe 2** Finden Sie ein kompaktes Dreieck  $\Delta \subset \mathbb{C}$  so, dass

$$\int_{\partial\Delta} \bar{z} dz \neq 0,$$

wobei  $\partial\Delta$  für einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg entlang des Randes des Dreiecks  $\Delta \subset \mathbb{C}$  steht.

**Aufgabe 3** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen mit  $0 \in U$ , und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i)  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt = 2\pi f(0).$

(ii)  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$

**Aufgabe 4** Es sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto 2e^{it}$ . Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy-Integralformel für Kreisscheiben:

(i)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

(ii)  $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z+i} dz$

(iii)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + (3-i)z - 3i} dz$