BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 25.06.2015, 14 Uhr

Aufgabe 1 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine (reell) differenzierbare Abbildung $f\colon U \to V$ mit in jedem Punkt von U invertierbarem Differential heißt *winkeltreu* (bzgl. des Standardskalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$), falls gilt: Für je zwei differenzierbare Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ mit Schnittpunkt $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ und mit $\gamma_j'(t_j) \neq 0, j = 1, 2$, gilt

$$\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{\|\gamma_1'(t_1)\| \cdot \|\gamma_2'(t_2)\|} = \frac{\langle (f \circ \gamma_1)'(t_1), (f \circ \gamma_2)'(t_2) \rangle}{\|(f \circ \gamma_1)'(t_1)\| \cdot \|(f \circ \gamma_2)'(t_2)\|}.$$

Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f\colon U \to V$ mit auf U nullstellenfreiem f' zwischen zwei Bereichen U und V stets eine winkeltreue Abbildung ist.

Aufgabe 2 Seien $r, a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ für

(i) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto re^{it}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$,

(ii) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto re^{nit}$ und $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-1}$,

(iii) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto a\cos(t) + ib\sin(t)$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.

Aufgabe 3 Seien $D_1 = D(-2, 2, 3i)$ das Dreieck mit Eckpunkten -2, 2, $3i$ und D_2 der Halbkreis $B_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Berechnen Sie:

$$\int_{\partial_+ D_i} z^2 \bar{z} dz, \quad i = 1, 2.$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die euklidische Länge der folgenden Wege:

(i) $\gamma\colon [0, a] \to C,\ \gamma(t) = t + it^{3/2},\ a > 0.$

(ii) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = \cos^3(t) + i\sin^3(t).$

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.