

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 8

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 18.06.2015, 14 Uhr

Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}$ und sei $\text{Log}: \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion (siehe Aufgabe 4, Blatt 7).

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass

$$\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w) \pmod{2\pi i}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}_-$.

Aufgabe 2 Sei $t \in (-\pi, \pi)$.

a) Zeigen Sie, dass $\text{Log}(e^{it}) = it$ und $\frac{\partial}{\partial z} \text{Log}(z) = \frac{1}{z}$.

b) Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{z}$ in eine Potenzreihe um e^{it} . Wie lautet der Konvergenzradius dieser Reihe?

c) Entwickeln Sie die Funktion $\text{Log}(z)$ in eine Potenzreihe um e^{it} . Wie lautet der Konvergenzradius dieser Reihe?

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass

$$|\text{Log}(z+1) - z| \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{1-|z|} \quad \text{für alle } |z| < 1.$$

Aufgabe 4 a) Sei $f(z) = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Zeigen Sie, dass $f''(z) = f(z)$.

b) Sei $J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$. Zeigen Sie, dass $z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0$.