

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015  
Übungsblatt 8

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 18.06.2015, 14 Uhr

---

Sei  $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}$  und sei  $\text{Log}: \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$  der Hauptzweig der Logarithmusfunktion (siehe Aufgabe 4, Blatt 7).

**Aufgabe 1** Zeigen Sie, dass

$$\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w) \pmod{2\pi i}$$

für alle  $z, w \in \mathbb{C}_-$ .

**Aufgabe 2** Sei  $t \in (-\pi, \pi)$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\text{Log}(e^{it}) = it$  und  $\frac{\partial}{\partial z} \text{Log}(z) = \frac{1}{z}$ .

b) Entwickeln Sie die Funktion  $\frac{1}{z}$  in eine Potenzreihe um  $e^{it}$ . Wie lautet der Konvergenzradius dieser Reihe?

c) Entwickeln Sie die Funktion  $\text{Log}(z)$  in eine Potenzreihe um  $e^{it}$ . Wie lautet der Konvergenzradius dieser Reihe?

**Aufgabe 3** Zeigen Sie, dass

$$|\text{Log}(z+1) - z| \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{1-|z|} \quad \text{für alle } |z| < 1.$$

**Aufgabe 4** a) Sei  $f(z) = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ . Zeigen Sie, dass  $f''(z) = f(z)$ .

b) Sei  $J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$ . Zeigen Sie, dass  $z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0$ .