BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 11.06.2015, 14 Uhr

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Taylorpolynome der Exponentialfunktion gegen ∞ streben, genauer: Zu jedem $r > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \neq 0$ für alle $|z| < r$ und $n \geq n_0$.

Aufgabe 2 Skizzieren Sie die Bilder der folgenden Punktmengen unter der Exponentialfunktion:

(i) $A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0\}$

(ii) $B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = \pi/2\}$

(iii) $C = \{(z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 1\}$

(iv) $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = \log 2\}$

(v) $E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < 3\pi/2\}$

(vi) $F = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\log 2 < x < \log 2, -\pi/2 < y < \pi/2\}$

Aufgabe 3 Seien $\arcsin\colon (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ und $\arccos\colon (-1, 1) \to (0, \pi)$ die Hauptzweige des Arcussinus bzw. des Arcuscosinus. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}$. Die Abbildung

$$\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C}_- \to (-\pi, \pi)$$

definiert durch

$$\operatorname{Arg}(z) := \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y > 0 \\ \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right), & x > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right), & y < 0 \end{cases}$$

heißt *Hauptzweig der Argumentfunktion*.

a) Zeigen Sie, dass Arg wohldefiniert ist.

b) Begründen Sie, warum Arg reell differenzierbar ist und zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial \operatorname{Arg}}{\partial x} = -\frac{y}{|z|^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \operatorname{Arg}}{\partial y} = \frac{x}{|z|^2}.$$

Bitte Wenden

Aufgabe 4 Die Abbildung

$$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\mathrm{Log}(z) := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

heißt *Hauptzweig der Logarithmusfunktion*; hierbei bezeichnet Arg die Abbildung aus Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass Log eine Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C}_-$ im Sinne der Vorlesung ist, d.h.

(i) Log ist holomorph, und

(ii) $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

b) Sei $L\colon \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ eine beliebige Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C}_-$. Zeigen Sie, dass dann ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$L(z) = \mathrm{Log}(z) + i2\pi k$$

für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.