BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 04.06.2015, 14 Uhr

Aufgabe 1 Gegeben Sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ kompakt konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ kompakt konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2 Seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ offen, und seien $f_n\colon D \to D'$ und $g_n\colon D' \to \mathbb{C}$ stetig. Die Folgen (f_n) und (g_n) mögen in D bzw. D' kompakt gegen f bzw. g konvergieren und es gelte auch $f(D) \subset D'$.

Zeigen Sie, dass dann die Folge $(g_n \circ f_n)$ in D kompakt gegen $g \circ f$ konvergiert.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{2^k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2+k}{2k^2+1}\right)^k z^k$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{3^k(2k)!}(z+1)^k$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\cos k) z^k$

Aufgabe 4 Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_k z^k$. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

(i) $\sum a_k z^{2k}$ (i) $\sum a_k^2 z^k$ (iii) $\sum a_k^2 z^{2k}$ (iv) $\sum \frac{a_k}{k!} z^k$

Hinweis: In Teil (iv) dürfen Sie verwenden, dass $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.