BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015

Übungsblatt 4

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 15.05.2015, 12 Uhr

Aufgabe 1 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g \colon U \to \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt $z_0 \in U$ reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z}}(z_0)$.

(ii) $\dfrac{\partial (fg)}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0) + f(z_0)\dfrac{\partial g}{\partial z}(z_0)$.

(iii) Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen, ist $f(z_0) \in V$ und ist $h \colon V \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $f(z_0)$ so gilt $\dfrac{\partial (h \circ f)}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial h}{\partial w}(f(z_0))\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial h}{\partial \bar{w}}(f(z_0))\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0)$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $f(z) = f(x+iy) = xy + \frac{i}{2}(y^2 - x^2 + 2)$.

(ii) $g(z) = z\mathrm{Re}\,(z)$.

(iii) $h(z) = (z^2 + 1 + |z|^2)^4$.

(iv) $k(z) = \sin(\mathrm{Re}\,(z))e^{-\mathrm{Im}\,(z)}$.

Aufgabe 3 a) Geben Sie eine stetige Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die genau in den Punkten der imaginären Achse komplex differenzierbar ist.

b) Sei h auf $\mathbb{C}$ definiert durch $h(z) := \sqrt{\mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Im}\,(z)}$. Zeigen Sie, dass h in 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dort aber nicht (komplex) differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f konstant.

(ii) $\mathrm{Re}\, f$ konstant.

(iii) $|f|$ ist konstant.

(iv) $\bar{f}$ holomorph.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.