

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015  
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 07.05.2015, 14 Uhr

---

**Aufgabe 1** Seien  $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)^2 \operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Lassen sich  $f, g$  stetig auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen?

**Aufgabe 2** Sei  $M \subset \mathbb{C}$ ,  $M \neq \emptyset$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  definiere

$$d(z, M) := \inf\{|z - p| : p \in M\}.$$

- a) Zeigen Sie die Ungleichung:  $|d(z, M) - d(w, M)| \leq |z - w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- b) Folgern Sie, dass  $d(\cdot, M)$  stetig auf  $\mathbb{C}$  ist.
- c) Berechnen Sie  $d(\cdot, M)$  für den Fall  $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$ .

**Aufgabe 3** Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Die Menge  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\bar{z}| < 1\}$  ist zusammenhängend.
- b) Ist  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $a \in G$ , so ist auch  $G \setminus \{a\}$  ein Gebiet.
- c) Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve. Dann ist für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge  $\gamma_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : d(z, \gamma) < \varepsilon\}$  zusammenhängend; hierbei bezeichnet  $d(\cdot, \gamma)$  die Abbildung aus Aufgabe 2 im Fall  $M = \gamma([0, 1])$ .

**Aufgabe 4** a) Überprüfen Sie welche der folgenden Mengen zusammenhängend sind:

(i)  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

(ii)  $M_2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

b) Sei  $M \subset \mathbb{C}$  und sei  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(i)  $M$  zusammenhängend  $\Rightarrow f(M)$  zusammenhängend.

(ii)  $f(M)$  zusammenhängend  $\Rightarrow M$  zusammenhängend.