BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie SoSe 2015
Übungsblatt 1

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 23.04.2015, 14 Uhr

Aufgabe 1 a) Sei $z = 1 + 2i$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(i) } \bar{z} \qquad \text{(ii) } |z| \qquad \text{(iii) } \frac{1}{z} \qquad \text{(iv) } z^2 + 2z + 5 + i$$

b) Seien $z = 1 + i$ und $w = 3 - 2i$. Brechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(i) } z + w \qquad \text{(ii) } z \cdot w \qquad \text{(iii) } \frac{z}{w} \qquad \text{(iv) } \frac{w}{z}$$

Aufgabe 2 a) Zeigen Sie, dass $\sin \arccos \theta = \sqrt{1 - \theta^2} = \cos \arcsin \theta$ für alle $\theta \in [-1, 1]$.

b) Sei $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ der Hauptzweig des Arcuscosinus. Dann wird wegen $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ durch

$$\arg(z) := \begin{cases} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & , \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \pi + \arccos\left(-\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right), & \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

eine Abbildung $\arg\colon \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ definiert. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{und} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Insbesondere gibt es also für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ ein $\theta := \arg(z) \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

c) Seien $z, w \in \mathbb{C}^*$ mit $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$. Zeigen Sie, dass dann

$$z \cdot w = |z||w|[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)].$$

Hinweis: Sie dürfen die Formel $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ *und die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen verwenden.*

Bitte Wenden

Aufgabe 3 Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$	(ii) $\operatorname{Re} z < 1$	(iii) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$
(iv) $\operatorname{Im} z \geq 0$	(v) $\lvert z\rvert \leq 2$	(vi) $1 < \lvert z\rvert < 3$
(vii) $\lvert z\rvert < 2$	(viii) $-\pi < \arg z < \pi$	(ix) $\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$

Hinweis: In Teil (viii) wird die Argumentenabbildung aus Aufgabe 2 als Abbildung $\arg\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *betrachtet.*

Aufgabe 4 Sei $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass L genau dann $\mathbb{R}$-linear ist, wenn es Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $L(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass L genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $L(z) = \lambda z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

Die Abgabe erfolgt jeweils ***Donnerstag bis 14 Uhr*** *in das* ***Postfach 33*** *auf Ebene D.13. Die neuen Übungszettel finden Sie jeden Donnerstag ab 14 Uhr auf der Homepage zur Vorlesung:* `http://www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss15/ft`.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.