Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. Shcherbina SoSe 2012

Klausur: Einführung in die Funktionentheorie

10.07.2012

Dauer: 2 h
Hilfsmittel: keine
Bitte geben Sie auf jedem Blatt oben Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Es sei f gegeben durch
$$z \mapsto \frac{z+8}{z^2 \cdot (z-2-2i)}$$
   (a) [2 P] An welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ weist die Funktion Singularitäten auf?
   (b) [3 P] Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
   (c) [3 P] Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$
   (d) [2 P] Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f im Punkt $5i$?

2. (a) [2 P] Wie lautet das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen?
   (b) [8 P] Bestimmen Sie:
$$\sup_{|z|\leq 1} \left| z^{17} \cdot \left(2z^2 - 5z + 2\right) \right|$$
   Wird das Supremum angenommen? Wenn ja, in welchen Punkten?

3. (a) [2 P] Wie lautet der Satz von Liouville über ganze Funktionen?
   (b) [4 P] Seien $U \subset \mathbb{C}$ und $V \subset \mathbb{C}$ Gebiete mit $U \cup V = \mathbb{C}$, wobei $U \neq \emptyset$ beschränkt und V unbeschränkt ist. Es seien je zwei holomorphe Funktionen $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ und $g_1, g_2 : V \to \mathbb{C}$ gegeben, welche folgende Eigenschaft erfüllen:
$$f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \text{ auf } U \cap V$$
   Zudem gelte, dass g_1 und g_2 beschränkt sind.
   Zeigen Sie, dass eine Konstante $k \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f_1 = f_2 + k$ auf U und $g_2 = g_1 + k$ auf V gilt.
   (c) [4 P] Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Liouville, d.h. Sie zeigen, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt. Betrachten Sie dazu $1/p$.

4. (a) [2 P] Wie lautet die Cauchy-Integralformel für Zyklen?
   (b) [4 P] Gegeben sei der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$. Berechnen Sie für $a \in (0,1)$ folgendes Wegintegral:
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1}\,\mathrm{d}z$$
   (c) [4 P] Hat die Funktion $g(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ eine holomorphe Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$?