Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Apl. Prof. Dr. G. Herbort
Dipl. Math. T. Pawlaschyk

Klausur zur Einführung in die Funktionentheorie 15.07.11

Aufgabe 1 (10=3+3+4 Punkte) Überprüfen Sie, ob es jeweils eine nicht-konstante, ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit:

(a) $|f(z)| \geq C > 0$.
(b) $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(c) $|f(z) - \frac{1}{z}| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Aufgabe 2 (10=5+5 Punkte)

(a) Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(G)$ mit $F := \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 = C$, wobei $C \geq 0$ konstant ist. Zeigen Sie, dass $f_1, \ldots, f_n$ konstant sind, indem Sie F erst nach z und dann $\bar{z}$ ableiten.
(b) Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to G$ holomorph und nicht-konstant mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass $f(z) = z$ für alle $z \in G$ gilt, indem Sie eine offene Menge $U \subset G$ finden mit $f(w) = w$ für alle $w \in U$.

Aufgabe 3 (10=3+4+3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(a) $\displaystyle\int_{\partial_+ \Delta(-2i,3)} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$
(b) $\displaystyle\int_{\partial_+ \Delta(1,1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$
(c) $\displaystyle\int_{\partial_+ \Delta(a,1)} \exp\left(\frac{z}{z-a}\right) dz$

Aufgabe 4 (10=5+5 Punkte) Stellen Sie die folgende Funktion f als Laurentreihe in den Kreisringen $A(2,0,1)$ und $A(0,3,\infty)$ dar.

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

Aufgabe 5 (10=5+5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ für $a, b > 0$
(b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}$ für $|a| < 1$, $a \neq 0$

Beginn: 12:00, **Ende:** 14:00