Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. Shcherbina SoSe 2014

Modulabschlussprüfung Analysis 1, Nachklausur

30.09.2014

Dauer: 2 h
Hilfsmittel: keine
Bitte geben Sie auf jedem Blatt oben Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
Begründen Sie Ihre Antworten.

1. [3 + 2 + 3 + 8 = 16 Punkte]

$$p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^{n-1}}{n}$$

(a) *Aufgabe:*
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe p.
Lösung:
Der Konvergenzradius ρ in x einer Potenzreihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k \neq 0$ berechnet sich nach der Formel von Euler als

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{1\text{ P}} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k+2}/(k+2)}{(-1)^{k+1}/(k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2}}_{1\text{ P}} = \underbrace{\qquad 1}_{1\text{ P}}$$

(b) *Aufgabe:*
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert Reihe $p(x)$ absolut?
Lösung:
Innerhalb des Konvergenzradius konvergiert die Reihe absolut, d.h. für $x \in (2,4)$ [1 P]. Für $x \in \mathbb{R} \setminus [2,4]$ divergiert die Reihe [1 P]. Am Rand dieses Intervalls, d.h. für $x \in \{2,4\}$ kann die Reihe (u.U. auch absolut) konvergieren, vgl. dazu die nächste Teilaufgabe.

(c) *Aufgabe:*
Gibt es $x \in \mathbb{R}$, wo die Reihe $p(x)$ konvergiert ohne absolut zu konvergieren?
Lösung:
In Frage kommen nur die Punkte $x \in \{2,4\}$.

$$p(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1}$$

$$p(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tag{2}$$

In (1) ergibt sich die (negative) harmonische Reihe, welche divergiert, also divergiert die Potenzreihe für $x = 2$. [1 P]
In (2) ergibt sich die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Das gesuchte Verhalten von p tritt also genau für $x = 4$ auf. [2 P]

(d) *Aufgabe:*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen q und r auf Konvergenz:

$$r := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right), \qquad q := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Lösung:
Die Reihe r ist eine Teleskopreihe [1 P]; für die Partialsumme erhält man:

$$\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{M+1}-1 \quad [2\text{ P}]$$

Somit konvergiert die Reihe $r=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M+1}-1=-1$. Die Reihe konvergiert absolut, da alle Summanden negativ sind. [1 P]
Die Konvergenz der Reihe q folgt durch Vergleich mit der Reihe r:

$$r=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2+n} \quad [1\text{ P}]$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt nun die absolute Konvergenz der Reihe q: [1 P]

$$0\le\frac{1}{n^2}\le 2\frac{1}{n^2+n}=-2\cdot\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) \quad [2\text{ P}]$$

Alternativ kann die Konvergenz von q auch mit dem Verdichtungskriterium oder mit dem Integralvergleichskriterium gezeigt werden.

2. [2 + 6 + 4 + 3 = 15 Punkte]

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\cdot\exp(x^2)}, & x\neq 1\\ 2e^{-1}, & x=1\end{cases}$$

(a) *Aufgabe:*
Ist f differenzierbar?
Lösung:
Für $x\neq 1$ gilt:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)\cdot\exp(x^2)}=\frac{x+1}{\exp(x^2)} \quad [1\text{ P}]$$

Zudem gilt offenbar $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\exp(x^2)}=2e^{-1}$. Somit ist die Funktion als Quotient (beliebig oft) differenzierbarer Funktionen mit nirgends verschwindendem Nenner überall (beliebig oft) differenzierbar. [1 P]

(b) *Aufgabe:*
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema.
Lösung:
Eine differenzierbare Funktion hat in jedem lokalen Extremum verschwindende Ableitung. [1 P]

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+1}{\exp(x^2)}=\frac{\exp(x^2)-(x+1)\cdot\exp(x^2)\cdot 2x}{(\exp(x^2))^2}=\frac{1-(x+1)\cdot 2x}{\exp(x^2)} \quad [1\text{ P}]$$

Die Nullstellen von f' liegen also bei $1-(x+1)\cdot 2x=0 \iff x^2+x-1/2=0 \iff (x+1/2)^2=3/4 \implies x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$. [1 P] Für die zweite Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-2x^2-2x+1}{\exp(x^2)}\\&=\frac{(-4x-2)\exp(x^2)-(-2x^2-2x+1)\cdot\exp(x^2)\cdot 2x}{(\exp(x^2))^2}\\&=\frac{(-4x-2)-(-2x^2-2x+1)\cdot 2x}{\exp(x^2)} \quad [1\text{ P}]\end{aligned}$$

In den beiden kritischen Punkten erhält man:

$$f''\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-2}{\exp\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}<0$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-4\cdot\left(-\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-2}{\exp\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}>0$$

Deshalb hat f in $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ ein lokales Maximum und in $\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ ein lokales Minimum; es gibt keine weiteren lokalen Extrema. [2 P]

(c) *Aufgabe:*
Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Lösung:
Da Nenner und Zähler differenzierbar sind und jeweils der Fall "∞/∞" vorliegt, folgt mit der Regel von Bernoulli–de-l'Hôpital: [2 P]

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\exp(x^2)}=\frac{1}{2x\exp(x^2)}=0 \quad [1\text{ P}]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\exp(x^2)}=\frac{1}{2x\exp(x^2)}=0 \quad [1\text{ P}]$$

(d) *Aufgabe:*
Wieviele Nullstellen hat f?
Lösung:

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{\exp(x^2)}=0 \Longleftrightarrow x=-1 \quad [2\text{ P}]$$

Die Funktion f hat genau eine Nullstelle. [1 P]

3. [8 + 7 = 15 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) *Aufgabe:*

$$\int_1^3 (\log(x))^2\,\mathrm{d}x$$

Lösung:
Die Stammfunktion der reellen Logarithmusfunktion lautet $\log(x)\cdot x-x$. [2 P] Das gesuchte bestimmte Integral erhält man durch partielle Integration [1 P]:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \log(x)\cdot\log(x)\,\mathrm{d}x &= (\log(x)\cdot x-x)\cdot\log(x)\big|_{x=1}^3-\int_1^3(\log(x)\cdot x-x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad [2\text{ P}]\\ &=(3\log(3)-3)\log(3)-\int_1^3(\log(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ &=(3\log(3)-3)\log(3)-(x\log(x)-2x)\big|_{x=1}^3\\ &=3\log^2(3)-6\log(3)+4 \quad [3\text{ P}]\end{aligned}$$

(b) *Aufgabe:*

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:
Damit der Integrand auf einem Intervall definiert und stetig ist, setzen wir $x \in (-1,1)$ voraus. Mittels Substitution [1 P] $x = \sin(t)$ und $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ [1 P] und unter Beachtung von $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ für $t \in (-\pi/, \pi/2)$ erhält man:

$$\int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \quad [1\text{ P}]$$

mit partieller Integration (oder alternativ mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ und $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$) erhält man nun

$$\begin{aligned}\int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t &= -\sin(t)\cos(t) + \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\sin(t)\cos(t) + \int (1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\sin(t)\cos(t) + t - \int \sin^2(t))\,\mathrm{d}t \quad [2\text{ P}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{\cos(t)\sin(t)}{2} &= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{\sin(\arcsin(x)) \cdot \cos(\arcsin(x))}{2} \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} \quad (+\text{ Konst.}) \quad [2\text{ P}]\end{aligned}$$

4. [3 + 6 + 5 = 14 Punkte] Die folgenden Teilaufgaben stehen nicht in direktem inhaltlichem Zusammenhang.

(a) *Aufgabe:*
Zeigen Sie, dass eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 7 mindestens eine Nullstelle besitzt.
Lösung:
Für f mit positivem Leitkoeffizient gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Für f mit negativem Leitkoeffizient gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. [1 P] Polynomfunktionen sind stetig. [1 P] In beiden Fällen folgt deshalb aus dem Zwischenwertsatz, dass ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0)$ existiert. [1 P]

(b) *Aufgabe:*
Zeigen Sie, dass eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn jede differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $f' = 0$ eine konstante Funktion ist.
Lösung:
Falls U zusammenhängend ist, gilt für jede differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $f' = 0$ nach einem Korollar aus dem Mittelwertsatz, dass die Funktion konstant ist. [2 P]
Falls U nicht zusammenhängend ist, existieren nicht-leere offene Mengen $U_1, U_2 \subset U$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = U$. [2 P] Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in U_1 \\ 0, & \text{falls } x \in U_2 \end{cases}$, ist lokal konstant, somit auch differenzierbar mit $f' = 0$, aber nicht konstant. [2 P]

(c) *Aufgabe:*
Wie lautet die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit für eine Funktion $h\colon (a,b) \to \mathbb{R},\ a < b$? Zeigen Sie, dass eine gleichmäßig stetige Funktion auf einem beschränkten offenen Intervall beschränkt ist.
Lösung:
Eine Funktion $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf (a,b), falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, damit für alle $x, y \in (a,b)$ mit $|x-y| < \delta$ folgt: $|h(x) - h(y)| < \epsilon$. [2 P]
Sei $\epsilon = 1$. Nach der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit existiert also ein $\delta > 0$ mit obgenannten Eigenschaften. Wir wählen ein $x_0 \in (a,b)$. Der Abstand von x_0 zu a bzw. zu b ist endlich. Deshalb existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\delta \cdot N > |x_0 - a|$ und $\delta \cdot N > |x_0 - b|$. [2 P] Die Funktionswerte von h können auf (a,b) also maximal um $\epsilon \cdot N = N$ von $h(x_0)$ abweichen, und damit ist h beschränkt. [1 P]