Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. Shcherbina SoSe 2014

Modulabschlussprüfung Analysis 1 Musterlösung

21.07.2014

1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz [4 + 5 + 6 = 15 P]

   (a) *Aufgabe:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Lösung:
Quotientenkriterium für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^3}{n!}$ anwenden: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{n^3}\frac{1}{n+1}$
[2 P] Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3}\frac{1}{n+1} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)\right)^3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Man kann also z.B. $q = 1/2 < 1$ wählen und erhält aus der Existenz des Grenzwertes, dass ein Grenzindex $M \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n \geq M \Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q = 1/2 < 1$. Somit konvergiert diese Reihe nach dem Quotientenkriterium (absolut). [2 P]
Alternativ kann auch (bei allerdings höherem Rechenaufwand) das Wurzelkriterium angewendet werden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{n!}}$$

Dazu berechnet man z.B. den Logarithmus und erhält:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\sqrt[n]{\frac{n^3}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(3\log(n) - \sum_{k=1}^{n}\log(k)\right)$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log(k)}{n} \leq -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_2^n \log(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n\log(n) - n - 2\log 2 + 2) = -\infty$$

wobei im letzen Schritt das Integralvergleichskriterium und $(x\log(x) - x)' = \log(x)$ angewendet wurde. Dies impliziert nun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Absolute Konvergenz folgt wie im o.g. Fall.

   (b) *Aufgabe:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

Lösung:
Durch Erweitern des Bruches $b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ mit $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ erhält man $b_n = |b_n| = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$. [2 P] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{3/2}}$ konvergiert nach dem Verdichtungskriterium (vgl. Blatt 6 Aufgabe 1a) bzw. nach dem Integralvergleichskriterium (absolut). Damit konvergiert nach nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (absolut).
[3 P]

Variante Verdichtungskriterium:

Für eine monoton fallende Nullfolge d_n gilt: $\sum_{n=1} d_n$ konvergiert genau dann absolut wenn $\sum_{n=1} 2^n d_{2^n}$ absolut konvergiert. Mit $d_n = n^{-3/2}$ erhält man $2^n d_{2^n} = 2^n \cdot (2^n)^{-3/2} = (\sqrt{2})^{-n}$, also eine konvergente geometrische Reihe.

Variante Integralvergleichskriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-3/2} \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{-1}{2} x^{-1/2} \bigg|_{x=1}^{\infty} = 1 < \infty$$

(c) *Aufgabe:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log(n^2)}{n}$$

Lösung:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ konvergiert nach dem Konvergenzkriterium von Leibnitz (oder Abel), falls c_n eine monoton fallende Nullfolge ist. [2 P]

Da die Funktion $n \mapsto \frac{\log(n^2)}{n} = 2\frac{\log(n)}{n}$ für reelle $n > 0$ als Quotient elementarer Funktionen mit nicht-verschwindendem Nenner differenzierbar ist, kann zur Berechnung des Grenzwertes und der Monotonie die Funktion abgeleitet werden.

i. Da sowohl Nenner und Zähler des Bruches Grenzwert ∞ haben, kann die Regel von Bernoulli–de-l'Hôpital angewendet werden: $\lim_{n\to\infty} 2\frac{\log(n)}{n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\log'(n)}{n'} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$ [2 P]

ii. $\left(2\frac{\log(n)}{n}\right)' = 2\frac{1/n \cdot n - \log(n) \cdot 1}{n^2} = -2 \cdot \frac{\log(n) - 1}{n^2} < 0$ für $n \geq 3$, also sind die Summanden ab $n \geq 3$ eine (streng) monoton fallende Folge. [2 P]

Die Voraussetzungen des Konvergenzkriteriums von Leibnitz sind erfüllt, die Reihe konvergiert.

2. *Aufgabe:*

[16 P] Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := \dfrac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^k}$ für $x \neq 0$ und $g(0) := 0$.

(a) Für welche $k \in \{1, 2, 3\}$ ist g in 0 stetig?

(b) Für welche $k \in \{1, 2, 3\}$ ist g in 0 differenzierbar?

(c) Für welche $k \in \{1, 2, 3\}$ weist g in 0 ein lokales Extremum auf?

Lösung:

Variante 1: mit Taylorentwicklung

Wir kennen folgende Taylorentwicklung für sin bzw. cos:

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot R_1(x)$$
$$\cos(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^7 \cdot R_2(x)$$

[4 P] mit auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Resttermen R_1 bzw. R_2. Für g ergibt sich damit

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^k} \\ &= \frac{x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot R_1(x)) - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^7 \cdot R_2(x))}{x^k} \\ &= x^{3-k} \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) + x^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + x^{7-k} \cdot R(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

mit auf $\mathbb{R}$ differenzierbarem Restterm R. [2 P]

Somit ist die Funktion g in $x = 0$ für $k = 1, 2$ differenzierbar und auch stetig. Für $k = 3$ gilt aber $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} g(x) = 1/(3!) - 1/(2!) \neq 0 = g(0)$, also ist in diesem Fall die Funktion nicht stetig und somit auch nicht differenzierbar. (Die Funktion $g|\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt zwar eine stetige bzw. sogar differenzierbare Fortsetzung in 0, aber diese stimmt nicht mit dem vorgebenen Funktionswert überein.) [4 P]

Aus der Taylorentwicklung lässt sich ablesen, dass für $k = 1$ die erste Ableitung von g in $x = 0$ verschwindet und die zweite Ableitung strinkt negativ ist, also weist g in diesem Fall in $x = 0$ ein striktes lokales Maximum auf. Für $k = 2$ ist die erste Ableitung in $x = 0$ von Null verschieden, also weist g dort in diesem Fall kein lokales Extremum auf. Im Falle von $k = 3$ ist die Funktion in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ außer in $x = 0$ strikt negativ, also hat g dort mit $g(0) = 0$ ein striktes lokales Maximum. [6 P]

Variante 2: mit der Regel von Bernoulli–de-l'Hôpital

(a) Die Ableitungen des Zählers ergeben:

$$\begin{aligned}(x\cdot\cos(x)-\sin(x))' &= -x\sin(x)\\ (x\cdot\cos(x)-\sin(x))'' &= -\sin(x)-x\cos(x)\\ (x\cdot\cos(x)-\sin(x))''' &= x\sin(x)-2\cos(x)\end{aligned}$$

[3 P] Somit folgt durch Anwendung der Regel von Bernoulli–de-l'Hôpital für den Fall "0/0", dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cdot\cos(x)-\sin(x))}{x^k} = \begin{cases} 0, & k=1\\ 0, & k=2\\ -1/3, & k=3\end{cases}$$

Also ist g in $x=0$ stetig für $k=1,2$ und unstetig für $k=3$. [3 P]

(b) Für die Differenzierbarkeit in $x=0$ berechnet man den Differentialquotienten

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(h)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cdot\cos(x)-\sin(x))}{x^{k+1}}$$

welcher nach der vorangehenden Teilaufgabe existiert für $k=1,2$, aber nicht für $k=3$. (Die Nicht-Existenz für $k=3$ kann auch aus gefolgert werden aus der Negation von: Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit.) [2 P]

(c) Für $k=1$ ist $g'(0)=0$. Mit der Quotientenregel erhält man

$$g'(x)=\frac{-x\sin(x)\cdot x-(x\cdot\cos(x)-\sin(x))}{x^2}=-\sin(x)-\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

[2 P] Somit lässt sich berechnen, dass

$$g''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin(x)}{x}+\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right)=-1+1/3=-2/3<0,$$

womit in $x=0$ ein striktes lokales Maximum vorliegt. [3 P]
Für $k=2$ ist $g'(0)=-1/3$, also kann keine lokale Extremstelle vorliegen. [1 P]
Für $k=3$ gilt $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} g(x)=-1/3$, also gibt es eine Umgebung von 0, in welcher alle Funktionswerte von g außer in $x=0$ strikt negativ sind. Wegen $g(0)=0$ weist g dort also ein striktes lokales Maximum auf. [2 P]

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale [8 + 8 = 16 P]

   (a) *Aufgabe:*

$$\int_1^3 \frac{y-1}{y+1} 2y \,\mathrm{d}y$$

   Lösung:
   Für den Integranden erhält man $\frac{y-1}{y+1}2y = (1 - 2\frac{1}{y+1})2y = 2y - 4\frac{y}{y+1} = 2y - 4 + 4\frac{1}{y+1}$, [3 P] also ergibt sich

$$\int_1^3 \frac{y-1}{y+1} 2y \,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(2y - 4 + 4\frac{1}{y+1}\right) \mathrm{d}y = y^2 - 4y + 4\log(y+1)\Big|_{y=1}^3 = 4\log(2)$$

   [5 P]

   (b) *Aufgabe:*

$$\int \sin(3x) \cdot \exp(-5x) \,\mathrm{d}x$$

   Lösung:
   Zweimalige partielle Integration [1 P] (mit Ableitung des ersten Faktors) ergibt:

$$\int \sin(3x)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x = \sin(3x)\frac{-1}{5}\exp(-5x) - \int 3\cos(3x)\frac{-1}{5}\exp(-5x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin(3x)\frac{-1}{5}\exp(-5x) + \frac{3}{5}\left(\cos(3x)\frac{-1}{5}\exp(-5x) - \int(-3)\sin(3x)\frac{-1}{5}\exp(-5x)\,\mathrm{d}x\right)$$

   [5 P] Setzt man $I := \int \sin(3x)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x$ führt dies zur Gleichung $I = \frac{-1}{5}\sin(3x)\exp(-5x) + \frac{-3}{25}\cos(3x)\exp(-5x) - \frac{33}{25}I$, woraus folgt:

$$I = \int \sin(3x)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{5}{34}\sin(3x) + \frac{3}{34}\cos(3x)\right)\exp(-5x)$$

   [2 P]
   Alternativ kann auch der zweite Faktor abgeleitet werden:

$$\int \sin(3x)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3}\cos(3x)\exp(-5x) - \int \frac{-1}{3}\cos(3x)(-5)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos(3x)\frac{-1}{3}\exp(-5x) - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\exp(-5x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)(-5)\exp(-5x)\,\mathrm{d}x\right)$$

   also $I = \frac{-1}{3}\cos(3x)\exp(-5x) + \frac{5}{9}\sin(3x)\exp(-5x) - \frac{25}{9}I$ mit gleicher Lösung für I.

4. Die folgenden Teilaufgaben stehen nicht in direktem inhaltlichem Zusammenhang. [9 + 4 = 13 P]

   (a) *Aufgabe:*
   Untersuchen Sie die Funktion $g\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) := \alpha \cdot (\log(x))^\beta$, auf Konkavität in Abhängigkeit der Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   Lösung:
   Die Funktion g ist als Verkettung elementarer Funktionen beliebig oft differenzierbar. Für eine zweimal differenzierbare Funktion g gilt: g ist genau dann konkav, wenn die zweite Ableitung negativ ist. [2 P]

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \left(\alpha \cdot (\log(x))^\beta\right)'' = \left(\alpha \cdot \beta \cdot \log(x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x}\right)' \\
&= \alpha \cdot \beta \cdot \left((\beta-1)\log(x)^{\beta-2}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \log(x)^{\beta-1} \cdot \frac{-1}{x^2}\right) \\
&= \alpha \cdot \beta \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}\log(x)^{\beta-2}}_{>0}\left((\beta-1) - \log(x)\right)
\end{aligned}
$$

   [4 P]
   Die zweite Ableitung ist auf dem ganzen Intervall $(1,\infty)$ negativ, falls

$$
\begin{cases}
\alpha = 0 \text{ und } \beta \in \mathbb{R} \\
\alpha > 0 \text{ und } 0 \leq \beta \leq 1 \\
\alpha < 0 \text{ und } \beta \leq 0
\end{cases}
$$

   [3 P]

   (b) *Aufgabe:*
   Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine auf (a,b) differenzierbare und auf $[a,b]$ stetige Funktion mit stetiger Ableitung f'. Zudem gelte $f(a) < f(b)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in (a,b)$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren, sodass f' auf dem Intervall $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ strikt positiv ist.
   Lösung:
   Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $c \in (a,b)$ derart, dass $0 < f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$, woraus $f'(c) > 0$ folgt. [2 P] Aufgrund der Stetigkeit von f' gilt dann: $\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in (a,b) \;:\; |x-c| < \varepsilon \Longrightarrow f'(c) > 0$. [2 P]

Total Punkte: 15 + 16 + 16 + 13 = 60