Analysis 1

Übungsblatt 8

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 16. Juni 2014

1. [2 Punkte] Die folgenden Mengen sind nicht kompakt. Geben Sie jeweils eine offene Überdeckung an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

(a) $X := [0, 1)$

(b) $Y := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

Vielleicht nützlich: $1/\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$

2. [1 Punkt] Gegeben seien zwei zusammenhängende Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ dann ebenfalls zusammenhängend ist.

3. [3 Punkte] Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $a \in X$, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ :\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(c) Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(a) \in U$ existiert eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in V$ derart, dass $V \cap X \subseteq f^{-1}(U \cap Y)$.

4. [1 Punkt] Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $f(Z)$ einer zusammenhängenden Menge $Z \subseteq X$ wieder zusammenhängend ist.

5. [1 Punkt] Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in 0 stetig ist und für welche eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(0) \in U$ existiert, deren Urbild $f^{-1}(U)$ nicht offen ist.

6. [2 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{für } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(n, m) = 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist.

Abgabe: jeweils ***Montags bis 12 Uhr*** *in die Postfächer der zuständigen Übungsgruppenleiter.*

Bitte melden Sie sich auf WUSEL für die Klausur an!